

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

**FIZIKAI LABORATÓRIUMI
GYAKORLATOK**

MECHANIKA, HŐTAN, OPTIKA, ELEKTROMOSSÁGTAN

Összeállította:

AZ OPTIKAI ÉS KVANTUMELEKTRONIKAI TANSZÉK, VALAMINT AZ MTA
LÉZERFIZIKAI TANSZÉKI KUTATÓCSOPORT MUNKAKÖZÖSSÉGE

Szerkesztette:

FARKAS ZSUZSA, HEBLING JÁNOS

Technikai szerkesztő:

FERINCZ ISTVÁN

SZEGED, 2001

A jegyzet anyagát összeállító munkaközösség tagjai:

- Dr. Benkő Zsolt** – Optikai és Kvantumelektronikai Tanszék
[10., 11., 16., 19. gyakorlatok]
- Dr. Csete Mária** – Optikai és Kvantumelektronikai Tanszék
[15., 21. gyakorlatok]
- Dr. Dombi József** – Optikai és Kvantumelektronikai Tanszék
[8., 13., 25. gyakorlatok]
- Dr. Farkas Zsuzsa** – Optikai és Kvantumelektronikai Tanszék
[1., 20., 23., 26. gyakorlatok]
- Ferincz István** – Optikai és Kvantumelektronikai Tanszék
[24. gyakorlat]
- Dr. Gingl Zoltán** – Kísérleti Fizikai Tanszék
[„A mérési eredmény megadása” című fejezet]
- Dr. Hebling János** – Optikai és Kvantumelektronikai Tanszék
[5., 12. gyakorlatok, „Mérési jegyzőkönyv készítése” című fejezet]
- Dr. Hopp Béla** – MTA Lézerfizikai Tanszéki Kutatócsoport
[4., 17., 18. gyakorlatok]
- Ignác Ferenc** – Optikai és Kvantumelektronikai Tanszék
[6., 7., 22. gyakorlatok]
- Dr. Ketskeméty István** – Optikai és Kvantumelektronikai Tanszék
[„A reverziós ingáról” című fejezet]
- Dr. Molnár Miklós** – Kísérleti Fizikai Tanszék
[2. gyakorlat]
- Dr. Tóth Zsolt** – MTA Lézerfizikai Tanszéki Kutatócsoport
[3., 9., 14. gyakorlatok]

Lektorálta:

Dr. Német Béla
(tanszékvezető egyetemi docens)

Előszó

Tisztelt Hallgatók! Ez a jegyzet elsősorban azok számára készült, akik egyetemi tanulmányaik során két féléven keresztül végeznek az alapkursusokon (Mechanika; Hullámtan-optika; Hőtan; Elektromosság; Atomfizika) elhangzott ismeretanyagra építő és azt elmélyítő fizikai laboratóriumi gyakorlatokat. Őszintén reméljük azonban, hogy olyan hallgatóink is eredményesen tudják használni, akik a fizikához közeli, más természettudományos szakokon tanulnak. A jegyzetben minden gyakorlathoz elméleti összefoglaló tartozik, amely tartalmazza a gyakorlatok elvégzéséhez szükséges legfontosabb elméleti tudnivalókat. Ezt követi a mérések leírása, az elvégzendő feladatok felsorolása, valamint az irodalomjegyzék. Külön fejezetben foglaltuk össze a hibaszámítás elemeit és a mérések kiértékeléséhez szükséges ismereteket.

A fizikai laboratóriumi gyakorlatok tematikája az elmúlt évtizedekben, a folyamatos fejlesztések eredményeként, jelentősen átalakult, eszközparkja – a kor követelményeihez igazodva – megújult. Ezért vált szükségessé egy új jegyzet elkészítése.

A tematika, illetve az egyes gyakorlatok megfogalmazása sokéves oktatói tapasztalatokon nyugszik. Köszönetünket fejezzük ki ezért minden kollégánknak, akik a jegyzetet író munkaközösségnek ugyan nem voltak tagjai, de az évek során szellemi és gyakorlati munkájukkal, ötleteikkel hozzájárultak a jegyzet anyagának kikristályosodásához. Külön köszönettel tartozunk Vize László tanár úrnak, aki évtizedeken keresztül gondozta, fejlesztette a „II. éves labor”-t. Köszönjük azoknak a – 2000/2001-es tanévben II. éves – hallgatóknak a munkáját, akik elsőként használva a jegyzet kéziratát, lelkesen segítettek abban, hogy a végső változat minél kevesebb hibát tartalmazzon.

Szeged, 2001. április 24.

A szerkesztők

Tartalomjegyzék

A mérési eredmény megadása.....	6
A mérési eredmény megadása közvetett mérés esetén, a mérési hiba terjedése	12
A legkisebb négyzetek módszere.....	13
Mérési jegyzőkönyv készítése	16
A mérési jegyzőkönyvek felépítése.....	16
Mérési eredmények ábrázolása.....	17
GYAKORLATOK	21
1. Körmozgás dinamikai vizsgálata.....	22
2. Tehetetlenségi nyomaték meghatározása fizikai inga lengésidejének mérésével.....	27
3. Nehézségi gyorsulás mérése reverziós ingával.....	32
4. Torziómodulus meghatározása torziós rezgésekből; tehetetlenségi nyomaték meghatározása torziós ingával	37
5. Csillapódó- és kényszerrezgések vizsgálata Pohl-féle készülékkel.....	42
6. Young-féle modulus meghatározása megnyúlás méréséből	47
7. Folyadékok felületi feszültségének meghatározása	51
8. Folyadékviszkozitás hőmérsékleti függésének vizsgálata Höppler-féle viszkoziméterrel	57
9. Hang terjedési sebességének mérése Kundt-féle csővel.....	64
10. Kalorimetriai mérések.....	71
11. Hőtágulási együttható mérése Newton-féle gyűrűk segítségével.....	77
12. Fénysebesség mérése levegőben, szilárd testben és folyadékban	81
13. Lencsék és lencserendszerek fókusztávolságának meghatározása.....	91
14. Mérések mikroszkóppal	101
15. Prizma törésmutatójának és diszperziójának meghatározása.....	108
16. Hullámoptikai kísérletek He-Ne lézerrel	115
17. Hullámhosszmérés optikai ráccsal és prizmás spektroszkóppal.....	124

18. A Rydberg-állandó meghatározása	129
19. Szilícium fényelem vizsgálata.....	134
20. Optikai szál numerikus apertúrájának meghatározása.....	139
21. Ellenállásmérés Ohm törvénye alapján és Wheatstone-híddal	143
22. Elektromos mérőműszerek méréshatárának kiterjesztése	152
23. A galvanométer vizsgálata.....	159
24. Félvezető diódák vizsgálata.....	168
25. Termoelektromotoros erő mérése.....	173
26. Termoelektromos hőpumpa (Peltier-cella) vizsgálata	177
MELLÉKLETEK.....	187
A Nemzetközi Mértékegység-rendszer (SI).....	188
A Nemzetközi Mértékegység-rendszer alapegységei.....	188
A Nemzetközi Mértékegység-rendszer kiegészítő egységei	189
A Nemzetközi Mértékegység-rendszer származtatott egységei.....	189
A Nemzetközi Mértékegység-rendszeren kívüli, korlátozás nélkül használható törvényes mértékegységek	191
A Nemzetközi Mértékegység-rendszeren kívüli, kizárólag meghatározott szakterületen használható törvényes mértékegységek.....	192
A reverziós ingáról.....	195
A higany-kadmium spektrállámpa spektrumvonalai	204
A hélium spektrállámpa fontosabb látható vonalai.....	205

A mérési eredmény megadása

A mérés során kapott értékek eltérnek a mérendő fizikai mennyiség valódi értékétől. Alapvetően kétféle mérési hibát különböztetünk meg: a determinisztikus és a statisztikus hibát. A determinisztikus hiba nagysága elvileg meghatározható, ezért ezt a hibafajtát sok esetben korrigálhatjuk. Egészen más a helyzet a statisztikus hiba esetén, amikor a hiba véletlenszerű, tehát nagyságát, de még előjelét sem tudjuk megjósolni. A következőkben a statisztikus hiba kezelésével foglalkozunk.

A mérési eredmény a mérési adatok és a hiba nagyságának ismeretében adható meg, a hiba ismerete nélkül a mérési adat önmagában elégtelen információt ad. Statisztikus hiba esetén a mérés hibájához csak valószínűségi értelmezést adhatunk, tehát azt mondjuk, hogy az x valódi érték – amit az $\langle x \rangle$ várhatóértékkel azonosítunk – adott valószínűséggel esik az úgynevezett megbízhatósági (konfidencia) intervallumba:

$$\bar{x} - \Delta x < x < \bar{x} + \Delta x, \quad (1)$$

melynek szokásos rövidebb írásmódja:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x. \quad (2)$$

Itt \bar{x} a mért adat, Δx pedig a statisztikus hiba.

Gyakran használjuk a dimenzió nélküli relatív hibát is, mely a következő formulával adható meg:

$$\frac{\Delta x}{x}. \quad (3)$$

A relatív hibát százalékban is megadhatjuk, melynek számértéke a fenti mennyiség százszorososa.

Laboratóriumi gyakorlatokon sokszor előfordul, hogy egy olyan fizikai mennyiséget mérünk, melynek értékét irodalmi értékkel vetjük össze. Ebben az esetben az irodalmi értéktől való relatív eltérést használhatjuk mérésünk hibájának jellemzésére:

$$\frac{|\bar{x} - x_0|}{x_0}, \quad (4)$$

ahol x_0 az irodalmi érték. Fontos megjegyeznünk, hogy ez a hiba nem csak a statisztikus, hanem a determinisztikus hibát is tartalmazza!

A következőkben megmutatjuk, hogyan adhatjuk meg a mérési eredményt a legfontosabb esetekben.

A véletlenszerű ingadozások mértékét a szórással jellemezzük és így a mérési eredmény statisztikus hibájának megadásához is a szórást használjuk fel. A mérési eredmények megadásakor két alapvető esetet különböztetünk meg.

A σ szórási értéke ismert:

Ez az eset gyakran előfordul, amikor a mérőműszer okozza a statisztikus hibát, és a műszer gyártója a szórást az adatlapban megadja. Ilyen esettel találkozhatunk, ha például tolómérőt vagy mikrométert használunk. A mérési eredmény megadása ekkor a következő

$$x = \bar{x} \pm \lambda \sigma . \quad (5)$$

Itt \bar{x} a mért adat, λ pedig az előírt valószínűségtől függő szám. Ha tudjuk, hogy a statisztikus ingadozás normális eloszlású, akkor λ értékét a következő összefüggés adja meg:

$$\lambda = F^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right), \quad (6)$$

ahol F^{-1} a $[0,1]$ paraméterű normális eloszlás eloszlásfüggvényének inverze, p pedig annak a valószínűsége, hogy a $2 \Delta x$ szélességű konfidencia intervallumban található a valódi érték. Mivel λ zárt formulával nem adható meg, értékét általában táblázat segítségével kaphatjuk meg (lásd I. táblázat). Megjegyezzük, hogy p helyett szokás az $\alpha = 1 - p$ szignifikancia szintet is használni.

Tudjuk, hogy az $\langle x \rangle$ várhatóértéket jobban közelíti a több mért adatból kiszámított \bar{x}_N középérték, mely a következő formulával adható meg:

$$\bar{x}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i . \quad (7)$$

Természetesen az N mért adatból számított középérték is egy véletlenszerűen ingadozó mennyiség, melynek várható értéke szintén $\langle x \rangle$, szórása viszont az eredeti

szórás \sqrt{N} -ed része. Ebből következően a mérési eredmény megadása több mért adat esetén a következő alakú:

$$x = \overline{x_N} \pm \frac{\lambda\sigma}{\sqrt{N}}. \quad (8)$$

Látható tehát, hogy azonos szignifikanciaszint mellett több mérési adat középértékének kiszámításával csökkenthető a mérés $\Delta x = \lambda\sigma / \sqrt{N}$ statisztikai hibája.

A szórás értéke ismeretlen:

Ha a szórás értékét nem ismerjük, akkor nem tudjuk az eddigiek alapján megadni a mérési eredményt, mivel nem tudjuk megadni a statisztikus hibát. Többszöri mérést végezve azonban az x_i mért adatokból a (9) egyenlet alapján kiszámíthatjuk az ún. korrigált empirikus szórást, mely nagyszámú mérés esetén jól közelíti a szórást.

$$\sigma_{N-1} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \overline{x_N})^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(x_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^2}. \quad (9)$$

Ennek segítségével már megadhatjuk a mért fizikai mennyiséget a 10. egyenletnek megfelelően, λ helyett most a t -eloszlásra utaló t_{N-1} jelölést használva:

$$x = \overline{x_N} \pm \frac{t_{N-1}\sigma_{N-1}}{\sqrt{N}}, \quad (10)$$

t_{N-1} szokásos értékeit a II. táblázatban foglaltuk össze.

Az I. és II. táblázat adatait összehasonlítva láthatjuk, hogy adott szignifikanciaszintet tekintve, kis számú mérés esetén t_{N-1} jelentősen felülmúlja λ értékét, a mérések számát növelve azonban azt (felülről) tetszőleges mértékben megközelelti. Ez összhangban van azzal, hogy a kis számú mérésből kiszámolt korrigált empirikus szórás kevésbé biztosan közelíti a szórást, mint a nagy számú mérésből kiszámított.

Vegyük észre, hogy a korrigált empirikus szórás definíciójából következően nem adhatjuk meg a mérési eredményt egyetlen mért adat esetén, mert nullával kellene osztanunk. Ez a tény is jól mutatja, hogy ha a szórás ismeretlen, egyetlen mért adattal nem adható meg a mérés eredménye.

A következőkben összefoglaljuk a mérési eredmény megadását az előzőekben tárgyalt esetekre.

Ha a szórás ismert és egy mért adatunk van:

$$x = \bar{x} \pm \lambda \sigma. \quad (11)$$

Ha a szórás ismert és N mért adatunk van:

$$x = \bar{x}_N \pm \frac{\lambda \sigma}{\sqrt{N}}. \quad (12)$$

Ha a szórás ismeretlen és $N \geq 2$ mért adatunk van:

$$x = \bar{x}_N \pm \frac{t_{N-1} \sigma_{N-1}}{\sqrt{N}}. \quad (13)$$

Fontos megjegyezni a következőt: A kiszámolt hibát két vagy három értékes jegyre kell kerekíteni, és a középértéket is ugyanannyi tizedes jegy pontossággal kell feltüntetni.

A következő táblázatok segítséget adnak λ és t_{N-1} értékeinek meghatározásához normális eloszlású, véletlenszerű mérési hiba esetére. Megjegyezzük, hogy laboratóriumi gyakorlatainkon leggyakrabban a 0,95 valószínűségi értéket használjuk.

I. Táblázat. λ értékei a p valószínűség, illetve az $\alpha = 1 - p$ szignifikanciaszint függvényében normális eloszlás esetére:

p	0,9	0,95	0,99	0,995	0,999
α	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
λ	1,64521	1,96039	2,57624	2,80739	3,29076

II. Táblázat. t_{N-1} értékei a p valószínűség, n illetve $\alpha = 1 - p$ szignifikanciaszint és az N mérési adatok száma, illetve $\nu = N - 1$ szabadsági fok függvényében t-eloszlás esetére.

N	ν	$p = 0,9$ $\alpha = 0,1$	$p = 0,95$ $\alpha = 0,05$	$p = 0,99$ $\alpha = 0,01$	$p = 0,995$ $\alpha = 0,005$	$p = 0,999$ $\alpha = 0,001$
2	1	6,31370	12,70615	63,65672	127,32133	636,61920
3	2	2,91996	4,30264	9,92477	14,08897	31,59903
4	3	2,35334	3,18244	5,84088	7,45326	12,92393
5	4	2,13183	2,77638	4,60409	5,59755	8,61026
6	5	2,01501	2,57052	4,03211	4,77329	6,86876
7	6	1,94311	2,44685	3,70741	4,31679	5,95875
8	7	1,89453	2,36459	3,49946	4,02927	5,40786
9	8	1,85952	2,30595	3,35537	3,83250	5,04129
10	9	1,83307	2,26215	3,24979	3,68960	4,78089
20	19	1,72913	2,09302	2,86087	3,17372	3,88339
30	29	1,69910	2,04518	2,75634	3,03797	3,65935
40	39	1,68487	2,02268	2,70784	2,97554	3,55810
50	49	1,67653	2,00957	2,67990	2,93970	3,50043
100	99	1,66036	1,98416	2,62640	2,87130	3,39150
150	149	1,65507	1,97597	2,60919	2,84940	3,35701
200	199	1,65254	1,97195	2,60070	2,83867	3,34002

Az alábbiakban néhány kidolgozott feladaton keresztül mutatjuk meg a fenti összefüggések és szabályok alkalmazását:

- 1) Tömegmérés mérési adata:

$m = 1,21$ kg, a szórás ismert, értéke: $\sigma = 0,017$ kg

Adjuk meg az $\alpha = 0,01$ szignifikanciaszinthez tartozó mérési eredményt!

$$m = (1,210 \pm 0,044) \text{ kg.} \quad (14)$$

$$p = 1 - \alpha = 0,99 \Rightarrow \lambda = 2,57624$$

$$\Delta m = \lambda \cdot \sigma = 2,57624 \cdot 0,017 \text{ kg} = 0,043796 \text{ kg} \sim 0,044 \text{ kg}$$

- 2) Az előző feladatban megadott feltételek mellett hány mérési adatot kell gyűjtünk ahhoz, hogy a mérés hibája 0,01 kg alá csökkenjen?

$$\Delta m < 0,01 \text{ kg} \Rightarrow \lambda \cdot \sigma / \sqrt{N} < 0,01 \text{ kg} \Rightarrow N > (0,043796 / 0,01)^2$$

$$N \geq 20. \quad (15)$$

- 3) Egy mérést többször elvégezve kaptuk:

$$R_1 = 7,20 \text{ } \Omega, R_2 = 7,19 \text{ } \Omega, R_3 = 7,19 \text{ } \Omega, R_4 = 7,22 \text{ } \Omega, R_5 = 7,23 \text{ } \Omega,$$

Adjuk meg az $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszinthez tartozó mérési eredményt!

Középérték: 7,206 Ω

Korrigált empirikus szórás: 0,018166 Ω

$$\alpha = 0,05, N = 5 (\nu = 4) \Rightarrow t_{N-1} = 2,77638$$

Hiba: $t_{N-1} \cdot \sigma_{N-1} / \sqrt{N} \approx 0,022556 \text{ } \Omega$

$$R = (7,206 \pm 0,023) \Omega. \quad (16)$$

A mérési eredmény megadása közvetett mérés esetén, a mérési hiba terjedése

Ha ismert egy fizikai mennyiség más fizikai mennyiségektől való $q=q(x,y,\dots)$ függése, akkor x,y,\dots mérésével q mérési eredménye is megadható, Ha az x,y,\dots mennyiségeket kicsi hibával mértük, akkor jó közelítéssel igaz, hogy

$$\bar{q} = q(\bar{x}, \bar{y}, \dots), \quad (17)$$

ahol a felülvonás a középértéket jelöli, és

$$\Delta q = \sqrt{\left. \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}, \dots}^2 \Delta x^2 + \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}, \dots}^2 \Delta y^2 + \dots \right.} \quad (18)$$

Ez a képlet alkalmas arra, hogy az x,y,\dots fizikai mennyiségek középértékének és hibáinak ismeretében meghatározzuk a származtatott q mennyiség középértékét és hibáját.

Egyváltozós függvény esetén a származtatott mennyiség hibáját megadó formula a következőképpen egyszerűsödik:

$$\Delta q = \left. \frac{dq}{dx} \right|_{\bar{x}} \Delta x. \quad (19)$$

Példa:

$$m = 3,21 \text{ kg} \pm 0,05 \text{ kg}$$

$$v = 7,31 \text{ m/s} \pm 0,11 \text{ m/s}$$

$$E = \frac{1}{2} mv^2$$

$$E = ?$$

$$\bar{E} = \frac{1}{2} m v^2 \approx 85,76494 \text{ J} \quad (20)$$

$$\frac{\partial E}{\partial m} = \frac{v^2}{2}, \quad \frac{\partial E}{\partial v} = mv \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \Delta E &= \sqrt{\left(\frac{v}{2}\right)^2 \Delta m^2 + \left|\frac{m}{v}\right|^2 \Delta v^2} = \\ &= \sqrt{\frac{7,31^4}{4} 0,05^2 + (3,21 \cdot 7,31)^2 0,11^2} J \approx \\ &\approx 2,906377 J \end{aligned} \quad (22)$$

Az E kinetikus energia mérési eredménye tehát:

$$E = (85,76 \pm 2,91) J \quad (23)$$

A legkisebb négyzetek módszere

A mérések elvégzése során gyakran előfordul, hogy két vagy több egymástól függő fizikai mennyiséget mérünk meg, Tegyük fel például, hogy megmértük az y és x mennyiségeket, amelyek között a következő függvénykapcsolat van:

$$y = f(x, a, b, \dots) \quad (24)$$

ahol a, b, \dots ismeretlen paraméterek, Hogyan határozhatók meg ezek a paraméterek? Mivel a mérések során kapott y_i és x_i mennyiségek értékei mérési hibával terheltek, ezért nem tudunk olyan a, b, \dots paramétereket választani, hogy a kapott függvény tökéletesen illeszkedjen a mérési pontokra, Találunk kell tehát egy feltételt, aminek teljesülése esetén kapott paraméterekkel a legjobbnak ítéljük meg a görbe mérési pontokra való illeszkedését, A paraméterek meghatározására az egyik legegyszerűbb és leggyakrabban alkalmazott eljárás a legkisebb négyzetek módszere,

A legkisebb négyzetek módszere szerint az illeszkedés akkor a legjobb, ha az alábbi négyzetösszeg minimális:

$$S(a, b, \dots) = \sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i, a, b, \dots)]^2 = \min. \quad (25)$$

Itt N a mérési adatpárok száma, x_i és y_i a mérések során kapott értékek, A paramétereket tehát úgy kell meghatároznunk, hogy a (25) egyenletben szereplő négyzetösszeg minimális legyen,

A (25) egyenlet megoldása általános esetben igen bonyolult szélsőérték-keresési problémához vezet, Sok esetre léteznek kidolgozott elméleti és numerikus módszerek,

Ezek közül az egyik legegyszerűbb és legfontosabb esetet, az egyenes-illesztést ismer-
tetjük, Ebben az esetben az f függvény alakja a következő:

$$y = a \cdot x + b, \quad (26)$$

így tehát olyan a és b paramétereket kell keresnünk, hogy az

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^N [y_i - (a \cdot x_i + b)]^2 \quad (27)$$

négyzetösszeg minimális legyen, A szélsőérték helyén az $S(a, b)$ összeg a és b szerinti
parciális differenciálhányadosa nulla értéket vesz fel, így jutunk a következő egyenle-
tekhez:

$$\frac{\partial S(a, b)}{\partial a} = \sum_{i=1}^N 2 \cdot [y_i - (a \cdot x_i + b)] \cdot (-x_i) = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\partial S(a, b)}{\partial b} = \sum_{i=1}^N 2 \cdot [y_i - (a \cdot x_i + b)] \cdot (-1) = 0. \quad (29)$$

Ebből a két egyenletből már kifejezhető a és b értéke:

$$a = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i - \overline{x_N} \cdot \overline{y_N}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \overline{x_N}^2}, \quad (30)$$

$$b = \overline{y_N} - a \cdot \overline{x_N}. \quad (31)$$

Az illeszkedés minőségét szokás az úgynevezett korrelációs együtthatóval vagy an-
nak négyzetével jellemezni, melynek definíciója a következő:

$$R^2 = \frac{\left[\sum_{i=1}^N (x_i - \overline{x_N})(y_i - \overline{y_N}) \right]^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \overline{x_N})^2 \sum_{i=1}^N (y_i - \overline{y_N})^2}. \quad (32)$$

R értéke 0 és 1 között található. Tökéletes illeszkedés esetén értéke 1, és minél kisebb
a pontok szórása, értéke annál közelebb esik 1-hez.

Fontos megkülönböztetnünk azt az esetet, amikor tudjuk, hogy az egyenesnek át
kell mennie az origón. Ilyennel találkozunk például, ha Ohm törvényét vizsgálva ábrá-
zoljuk a feszültséget az áramerősség függvényében. A b paraméter értéke ekkor azono-

san zérus, és elvi hibát követünk el, ha illesztési paraméterként kezeljük. A legjobb illeszkedés feltétele a következő alakú:

$$S(a) = \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i)^2. \quad (33)$$

Ebből kapjuk:

$$\frac{dS(a)}{da} = \sum_{i=1}^N 2(y_i - ax_i)(-x_i) = 0, \quad (34)$$

tehát a értéke így adható meg:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}, \quad (35)$$

Az egyenes illesztését ma már célszerűen számítógépen elérhető adatfeldolgozó programok segítségével végezzük el. Ekkor is legyünk figyelemmel arra, hogy az origón átmenő illesztésnél a b paraméter azonosan nulla legyen.

Mérési jegyzőkönyv készítése

A mérési jegyzőkönyvek felépítése

A laboratóriumi gyakorlat elvégzésének lényeges részét képezi a jegyzőkönyv elkészítése. Fontos, hogy a jegyzőkönyv jól áttekinthető legyen. A következőket kell tartalmaznia:

- a mérés tárgya (a gyakorlat címe),
- a mérés elvégzésének időpontja,
- rövid elméleti összefoglaló (a mérési eredmények feldolgozásához szükséges összefüggések),
- a mérési összeállítás rajza, a használt eszközöknek a mérés szempontjából fontos adatai,
- a mérések közvetlen eredménye,
- a mérési eredmények feldolgozása.

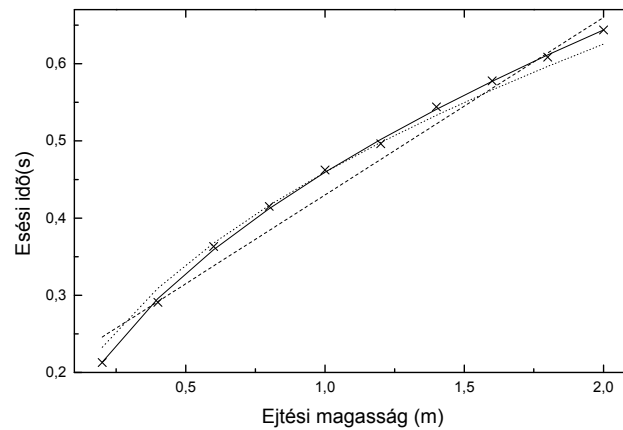
A mérések célja nagyon gyakran egy függvénykapcsolat meghatározása. Ilyen esetekben (legalább) egy x fizikai mennyiséget (amit független változónak fogunk nevezni) változtatunk és mérjük egy másik y fizikai mennyiség (amit függő változónak fogunk nevezni) értékét (is). A közvetlen mérési eredményeket célszerű ilyenkor táblázatba foglalni, az első sorba írva a független változó x_i értékeit, a következő sorokba pedig a függő változó ismételt mérésekkel kapott y_{ij} értékeit. A táblázat utolsó sora tartalmazza a független változó különböző értékeinél kapott függő változó átlagértékeket és hibákat: $\overline{y}_i \pm \Delta y_i$. Ezt az eljárást akkor alkalmazzuk, ha feltehetjük, hogy x relatív mérési hibája jóval kisebb, mint y -é. Abban a gyakrabban előforduló esetben, amikor nem élhetünk ezzel a feltevéssel az x_i értékeket is többször mérjük. Az ismételt mérésekkel kapott x_{ij} értékeket egymás alatti sorokba írjuk, majd a következő sorban megadjuk az ezekből számolt $\overline{x}_i \pm \Delta x_i$ értékeket.

Az így nyert értékek nagyon gyakran még nem jelentik a mérések végeredményét,

és az így kapott értékekből a mérési eredmények feldolgozása során különböző, más fizikai mennyiségeket számolunk ki. Például egy eszköz elektromos ellenállását mérhetjük oly módon, hogy mérjük az eszközön átfolyó áram erősségét az eszközön eső feszültség függvényében. A mérésünk végeredménye nem az áramerősség lesz, hanem az összetartozó áramerősség és feszültség értékekből kiszámított ellenállásértékek. A mérési eredmények feldolgozásához a legtöbb esetben hozzátartozik a közvetlenül mért fizikai mennyiségeknek, vagy az ezekből számításokkal kapott más fizikai mennyiségeknek az ábrázolása.

Mérési eredmények ábrázolása

A fizikai mennyiségek ábrázolási módjai közül csak a legelterjedtebb típussal, a grafikonokkal (lásd 1. ábra) foglalkozunk.



1. ábra

A grafikonok készítésével általában a mérési eredmények gyorsan áttekinthető bemutatását kívánjuk elérni. Ennek a célnak akkor felel meg a grafikon, ha jól áttekinthető, vízszintes mérete (a TV képernyőnél megszokott módon) kb. másfélszer nagyobb a függőleges méreténél, a tengelyeken 3-6 beosztás található, a tengelyeken fel van tüntetve az ábrázolt fizikai mennyiség neve, vagy jele és mértékegysége. Ha van értelme a megkülönböztetésnek, a vízszintes tengely mentén a független, a függőleges

tengely mentén pedig a függő változó mért értékét ábrázoljuk, úgy, hogy az összetartozó független és függő változó értékeknek megfelelő helyeken valamilyen szimbólumot (pl.: \times , $+$, \bullet) helyezünk el (rajzolunk). A beosztásokat úgy kell megválasztani, hogy a mérési eredmények minél jobban kitöltsék a tengelyeken feltüntetett tartományokat!

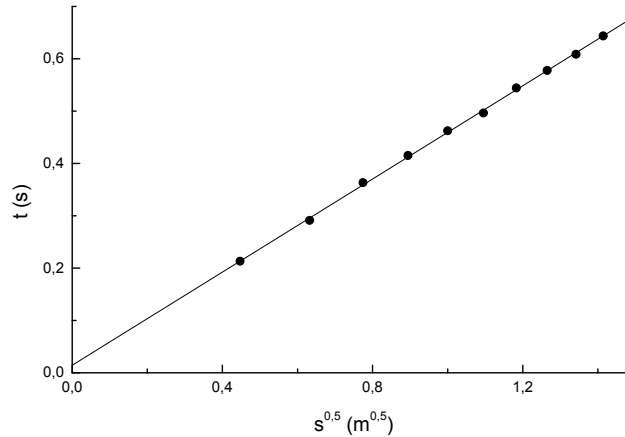
Ezzel előállítjuk a mérési eredmények grafikus ábrázolását. Általában azonban a fizikai mennyiségek nem csak a mért értéket vehetik fel, hanem tetszőleges értéket. Ennek megfelelően a függő- és független változó közötti összefüggést egy folytonos görbével ábrázoljuk a grafikonon. Ezt a görbét úgy rajzoljuk fel a mérési eredmények ábrázolása után, hogy lehetőleg éles töréseket ne tartalmazzon, és a mért eredmények kiegyensúlyozottan helyezkedjenek el körülötte. Az 1. ábrán a folytonos görbe az adott mérési pontokhoz tartozó, helyesen rajzolt, a szaggatott és pontozott görbe pedig két helytelenül rajzolt görbét mutat. Természetesen az ilyen kritériumok alapján történő rajzolás szubjektív, emiatt (is) a kapott görbét csak az $y(x)$ függvény első ábrázolási kísérletének tekinthetjük. Ha ez a görbe egyenesnek látszik, akkor „A legkisebb négyzetek módszere” című fejezetben leírt módon határozzuk meg a mérési pontokra legjobban illeszkedő egyenest, illetve az $y(x)$ függvénykapcsolatot. Ha a görbe szemmel láthatóan nem egyenes, akkor ún. *linearizálás* segítségével keressük meg az $y(x)$ függvényt. A linearizálás azt jelenti, hogy változó-transzformációkat hajtunk végre, vagyis az x és y független- és függő változó helyett olyan $x' = f(x)$ és $y' = g(y)$ változókat vezetünk be, amelyek között lineáris összefüggés áll fenn, azaz

$$y' = a \cdot x' + b, \quad (1.a)$$

$$y' = a \cdot (x' - x'_0) \quad (1.b)$$

A szükséges változó-transzformációt a legáltalánosabb esetben az eredeti grafikon alapján, a görbe menetéből állapítjuk meg. Például, ha azt sejtjük, hogy az 1. ábrán látható görbe négyzetgyökös összefüggést követ, akkor az eredeti x_i, y_i mérési eredményekből kiszámoljuk az $x'_i = \sqrt{x_i}$ és $y'_i = y_i$ értékeket. Ha a sejtésünk helyes volt, akkor ezen x'_i és y'_i mennyiségek közötti $y'(x')$ függvénykapcsolat már lineáris (lásd 2. ábra), azaz 1.a szerinti alakba írható. Az 1.a egyenletben szereplő a és b állandók az x'_i

és y_i mennyiségekből „A legkisebb négyzetek módszere” című fejezetben leírtak szerint határozhatóak meg.



2. ábra

Ezeknek az állandóknak általában konkrét fizikai jelentésük van. Ha például az 1. ábra egy szabadon eső tárgy esési idejét ábrázolja az ejtési magasság függvényében, akkor a reciproka a nehézségi gyorsulás felével egyenlő, $1/a = g/2$ és b a „reakcióidő”. Ha meghatároztuk az 1.a egyenletben szereplő a és b együtthatókat, akkor a linearizálást befejeztük, az $y'(x')$ összefüggést ismerjük. A végső célunk azonban nem az $y'(x')$, hanem az $y(x)$ függvénykapcsolat megadása. Ezt a linearizálás után könnyen megtehetjük a $g(y)$ függvény inverz-függvényének alkalmazásával, hiszen $y = g^{-1}(y')$ és 1.a felhasználásával kapjuk:

$$y = g^{-1}[a \cdot f(x) + b]. \quad (2)$$

Az $y(x)$ függvény gyakran túl bonyolult ahhoz, hogy a grafikus ábrázolásból fel tudjuk ismerni a szükséges $x' = f(x)$ és $y' = g(y)$ változó-transzformációk alakját. Azonban általában az $y(x)$ függvény alakját fizikai ismereteink alapján meg tudjuk mondani, csupán a függvénykapcsolatban szereplő együtthatókat nem ismerjük, és a mérés célja éppen ezeknek az együtthatóknak a meghatározása. A linearizálást ilyenkor is tudjuk alkalmazni.

GYAKORLATOK

1. Körmozgás dinamikai vizsgálata

Célkitűzés:

- Kényszermozgás vizsgálata, értelmezése inerciarendszerben és gyorsuló koordinátarendszerben.
- Foto-kapuvál történő mérés elvének megismerése.
- A centrifugális erő erőtvényének igazolása az erő, a tömeg, a forgástengelytől való távolság, valamint a periódusidő mérésével.
- Linearizálás elvének gyakorlása.

Elméleti összefoglaló:

Ha egy test (tömegpont) egyenletes körmozgást végez, akkor kerületi sebességének nagysága állandó, iránya pedig változik, minden időpillanatban a körpálya adott pontjához húzott érintő irányával egyezik meg. A sebességvektor irányváltozásából következik, hogy a mozgás gyorsuló és a gyorsulásvektor a kör középpontja felé mutat.

Mint ismeretes, a mozgásokat tárgyalhatjuk inerciarendszerben, de tárgyalhatjuk gyorsuló koordinátarendszerben is. Ha az egyenletes körmozgás például egy teremben játszódik le, akkor, mivel a terem jó közelítéssel inerciarendszer, az ott tartózkodó megfigyelő a következőképpen értelmezheti a jelenséget: A testre ható erők eredője a kör középpontja felé mutat, nagysága pedig: $F = ma = mv^2 / r = m\omega^2 r$, ahol F az erőt, a a gyorsulást, m a test tömegét, r a test forgástengelytől való távolságát, v a kerületi sebességét, ω pedig a szögsebességét jelöli az inerciarendszerben. Mivel a v^2 / r nagyságú és a kör középpontja felé mutató gyorsulás a centripetális elnevezést kapta, ezért azt az erőt, amely ezt a gyorsulást eredményezi *centripetális erőnek* szokás nevezni. (A centripetális szó latin eredetű. A centrum középpontot jelent, a petális jelentése valami felé igyekvő, törekvő.) A körmozgást fenntarthatja egyetlen erő is, sokszor azonban

több erő eredője hozza létre, melyek közt szabad erők (például: gravitációs erő) és kényszer erők (például: fonal erő) egyaránt lehetnek. Ez utóbbi esetben a centripetális erő a ható erők eredője.

Ha a megfigyelő a vizsgált testtel együtt forgó koordinátarendszerekből akarja értelmezni az egyenletes körmozgást, akkor azt tapasztalja, hogy a test az ő számára nyugalomban van, azaz a ráható erők eredőjének nullának kell lennie. Ezen tapasztalat értelmezéséhez a megfigyelőnek fel kell tételeznie, hogy az inerciarendszerben is fellelhető, körmozgást biztosító erő/erők mellett azok eredőjével megegyező nagyságú, ellentétes irányú (radiálisan kifelé mutató) erő is hat. Ezen erő vektori alakja: $\vec{F}_f = m\omega^2\vec{r}$, ahol \vec{r} a forgás középpontjától a testhez húzott helyvektor. Ezt az erőt, amely tehát csak forgó koordinátarendszerben észlelhető, *centrifugális erőnek* nevezzük. Ez az erő nem kölcsönhatásból származik, az ún. tehetetlenségi vagy inerciaerők csoportjába tartozik. Ebből következik, hogy nem érvényes rá *Newton III. axiómája*, így ellenerje sincs.

Jegyezzük meg, téves minden olyan magyarázat, amely a centripetális-centrifugális erőt erő-ellenerő párnak, hatás-ellenhatásnak nevezi. Közöttük csupán formai, alaki hasonlóság van: $F = m\omega^2 r$; lényegüket tekintve különböznek, fizikai értelemben semmilyen kapcsolatban nem állnak egymással.

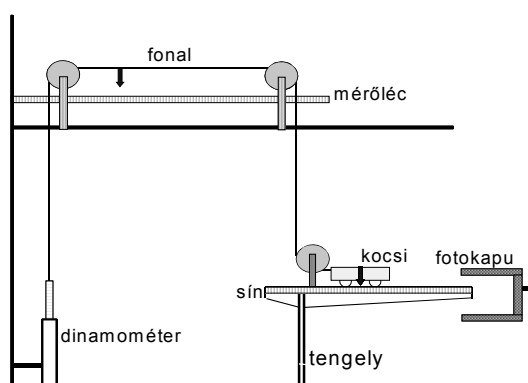
Ezen a gyakorlaton – gyorsuló koordinátarendszerekből nézve – a centrifugális erő mérésére alkalmas kísérleti berendezéssel ismerkedünk meg. A kísérleti elrendezésben egy kiskocsi (tömegpontnak tekintjük) végez körmozgást. Változtatható a kiskocsi tömege, szögsebessége és a körpálya sugara. A körmozgást a kiskocsihoz kötött fonalban ébredő erő hozza létre. A feladat az, hogy megvizsgáljuk, hogy az érzékeny dinamométerrel mérhető fonálerő, vagy az ezzel megegyező nagyságú centrifugális erő hogyan függ az előbbi paramétereiktől, azaz a tömegtől, a szögsebességtől és a körpálya sugarától. A súrlódási erőt elhanyagoljuk.

Kísérleti összeállítás fő részei:

- Forgómozgást végző sín változtatható tömegű kiskocsival (a kocsi tömege 50 g).
- Motor, amelynek fordulatszáma potenciométerrel változtatható.
- Periódusidő mérésére alkalmas foto-kapu és számláló-berendezés.
- Dinamométer az erő mérésére.

A kísérleti elrendezés és a mérés menete:

A kísérleti berendezés elvi felépítése az 1. ábrán látható. A változtatható fordulatszámú motor szíjátétellel forgat egy függőleges tengelyt, amelyhez egy vízszintes helyzetű sín van erősítve. A sínen



1. ábra

helyezkedik el a kiskocsi, amely állócsigákon átvezetett fonallal csatlakozik a dinamométerhez. A dinamométer függőleges irányú mozgatásával változtatható a kocsi helyzete a sínen. A kocsi tömegközéppontja és minden más pontja a forgástengelyre merőleges síkú körpályán mozog. A mozgás kényszermozgás; a kör középpontja

felé mutató erőt a fonalban ébredő kényszer erő biztosítja. A kocsi tömegközéppontjához erősített nyíl jelzi a tömegközéppont forgástengelytől való távolságát. A kényelmesebb leolvasás érdekében ez a jelzés „megismétlődik” a nyújthatatlannak feltételezett fonálon – a fonalra erősített nyíl együtt mozog a kiskocsival –, amely mögött elhelyezett mm-es beosztású mérőlécen lehet a forgástengelytől való távolságot, azaz a körpálya sugarát leolvasni akkor is, amikor a rendszer mozgásban van.

A periódusidő mérésére foto-kapuvál működő érzékelő rendszert használunk. A sín minden fordulatonál egy foto-kapu U-alakú érzékelőterén halad át.

A foto-kapu két lényeges részből áll, egy fényadóból és egy fényérzékelőből. A fényadó, mellyel szemben követelmény, hogy jól definiált, vékony fénysugarat bocsásson ki, a legtöbb esetben – így az általunk használt foto-kapunál is –, egy infravörös fényt emittáló dióda (infra-LED), de megfelelő lehet erre a célra például egy kisméretű izzó irányított fénynyalábja is. Fényérzékelőként fényelem, fényellenállás, fotodióda vagy foto-tranzisztor használható. Pontos, megbízható működéséhez az szükséges, hogy érzékelő felülete kicsi legyen.

A mérés során a LED és a foto-tranzisztor között áthaladó sín a fényutat megszakítja és ezáltal a foto-tranzisztor áramkörében feszültségváltozás keletkezik. Ez a jel indítja el az időmérést, majd a következő jel érkezésekor megállítja azt, biztosítva ezzel egyetlen körfordulás idejének, azaz a periódusidőnek a megmérést. Az időmérő-berendezés négy dekádos: a periódusidőt négy értékes jegy pontossággal tudja kijelteni.

A fordulatszám, s így a periódusidő kényelmesen változtatható a motor áramkörébe kapcsolt potenciométerrel.

Az erő mérésére tized-newton pontosságú, 2,5 N méréshatárú dinamométert használunk.

Feladatok:

- 1) Tanulmányozza az összeállított kísérleti berendezést. Bekapcsolásához kérje gyakorlatvezetője segítségét.
- 2) Állítson be adott fordulatszámot, illetve periódusidőt (pl. $T = 0,7$ s) és valamely tömeg mellett (pl. $m = 100$ g) mérje meg az erőt a sugár, azaz a körmozgást végző kocsi tömegközéppontjának forgástengelytől való távolsága ($r = 10, 14, 18, 22, 26, 30$ cm) függvényében. Ez a távolság alaphelyzetben konstrukciós okokból 8,5 cm. m értéke alatt itt és a továbbiakban is a kiskocsi és a rátehető póttömegek össztömegét értjük. A periódusidőt minden beállításnál ellenőrizze és szükség esetén korigálja. Mindezt a 3) és 4) feladatnál is végezze el.

Ábrázolja grafikonon az erőt a sugár függvényében. Számítsa ki a grafikon meredekségét. A meredekségből meghatározható $m\omega^2$ értéket vesse össze a rögzített ($m = 100$ g, $T = 0,7$ s) adatokból számolható értékkel. Adja meg az előbbi mennyiségek relatív eltérését.

- 3) Állítson be adott fordulatszámot, illetve periódusidőt (pl. $T = 0,7$ s). Adott sugár mellett (pl. $r = 20$ cm) mérje meg a dinamométer által mutatott erőt a tömeg ($m = 50, 70, 90, 110, 130, 150$ g) függvényében. A sugarat a dinamométer elmozdításával tudja állandó értéken tartani.

Ábrázolja az erő értékeit a tömeg függvényében. Számítsa ki a grafikon meredekségét. A meredekségből meghatározható $r\omega^2$ értéket vesse össze a rögzített ($r = 20$ cm, $T = 0,7$ s) adatokból számolható értékkel. Adja meg az előbbi mennyiségek relatív eltérését.

- 4) Változtassa a fordulatszámot a potenciométer segítségével. Állítson be kb.: $T = 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4$ s értékeket. Adott tömeg (pl. $m = 150$ g) esetén, adott sugár (pl. $r = 20$ cm) beállítása mellett mérje meg az erő értékeit.

Készítse el az erő-szögsebesség grafikont. Linearizálja az összefüggést. Készítse el a linearizált grafikont, majd számítsa ki a meredekségét. Az ebből meghatározható mr értéket vesse össze a rögzített ($r = 20$ cm, $m = 150$ g) adatokból számolható értékkel. Adja meg az előbbi mennyiségek relatív eltérését.

Ajánlott irodalom:

📖 Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., 12.§, 52.§

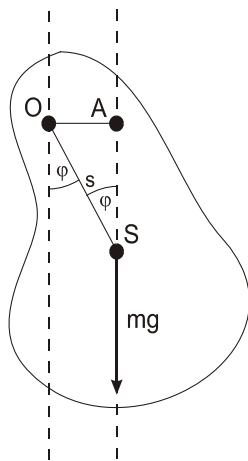
2. Tehetlenségi nyomaték meghatározása fizikai inga lengésidejének mérésével

Célkitűzés:

- A fizikai inga jellemzőinek megismerése
- Fémtárcsa (korong) tehetlenségi nyomatékának meghatározása

Elméleti összefoglaló:

A fizikai inga olyan merev test, amely rögzített, vízszintes tengely körül foroghat a



1. ábra

nehézségi erő hatása alatt. Legyen a test S súlypontján átmenő és a forgástengelyre merőleges sík az 1. ábra síkja, a tengelynek ezzel való dőfési pontja O, és jelöljük az \overline{OS} távolságot s -sel, a forgástengelyre vonatkozó tehetlenségi nyomatékot Θ -val. Ha az ingát stabilis egyensúlyi helyzetéből (az S súlypont az O alátámasztási pont alatt van!) φ szöggel kitérítjük, azaz az OS egyenes a függőlegessel φ szöveget zár be, úgy a nehézségi erő az 1. ábra alapján

$$M_x = -mg\overline{OA} = -mgs \sin \varphi \quad (1)$$

forgatónyomatékot gyakorol az ingára. Így a mozgásegyenlet:

$$\Theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mgs \sin \varphi, \quad (2)$$

vagy átrendezve

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{mgs}{\Theta} \sin \varphi. \quad (3)$$

Ezt a matematikai inga

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \varphi \quad (4)$$

alakú mozgásegyenletével összehasonlítva látható, hogy a fizikai inga ugyanúgy leng, mint egy

$$l_r = \frac{\Theta}{ms} \quad (5)$$

hosszúságú matematikai inga, tehát kis kitérések, amplitúdók esetén a fizikai inga lengésideje:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{mgs}}; \quad (6)$$

nagyobb amplitúdóknál korrekció alkalmazandó. Az l_r mennyiséget a fizikai inga redukált hosszának nevezzük.

A fizikai inga mint merev test adott tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékán a test tömegeloszlásától függő

$$\Theta = \sum m_i l_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (7)$$

pozitív mennyiséget értjük, ahol l_i az m_i tömegű pontnak a z-tengelytől (a forgástengelytől) mért távolsága.

Kimutatható, hogy egy homogén tömegeloszlású, lapos körhenger (tárcsa, korong) tehetetlenségi nyomatéka a síkjára merőleges szimmetriatengelyére vonatkozóan:

$$\Theta_0 = \frac{1}{2} MR^2, \quad (8)$$

ahol M a körhenger tömege, R pedig a sugara.

Ha a forgástengely nem a szimmetriatengely, de azzal párhuzamos, akkor az erre a tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték a Steiner-tétellel számítható ki:

$$\Theta = \Theta_0 + Ms^2, \quad (9)$$

ahol s a két tengely egymástól mért távolsága.

Mérés menete:

A gyakorlaton kiadott tárcsát, amely a középpontján átmenő vízszintes tengely körül elfordulhat, állványba fogtuk. Tömege (M) ismeretlen és (a kiadott eszközökkel – levélmérleg) *nem* mérhető. A tárcsát gondosan kiegyensúlyoztuk, azaz éppen

súlypontjában van alátámasztva, így közömbös (indifferens) egyensúlyi helyzetben van. A tárcsába, annak egyik átmérője mentén, a tengelytől meghatározott l távolságokra kisméretű lyukakat fúrtunk.

A tárcsa Θ_0 tehetlenségi nyomatékát úgy határozhatjuk meg, hogy a tárcsán levő egyik lyukba kisméretű, m tömegű hengert csavarozunk. Így egy $M + m$ tömegű fizikai ingát kapunk, amelynek lengésideje mérhető. Kis kitérések mellett fennáll ekkor, hogy

$$T = \sqrt{\frac{\Theta}{(M + m)gs}}, \quad (10)$$

ahol Θ a tárcsa (mint fizikai inga) adott (O) forgástengelyre vonatkozó tehetlenségi nyomatéka, amely additív módon tehető össze a tárcsa Θ_0 – állandó – és a henger –

változó –, a távolságtól függő Θ_b tehetlenségi nyomatékából. Ha a tárcsára szerelt henger pontszerű (vonalszerű) testnek tekintjük, akkor

$$\Theta = \Theta_0 + \Theta_b = \Theta_0 + ml^2, \quad (11)$$

ahol l a henger középpontjának a tárcsa középpontjától mért távolsága.

Ha az m tömegű hengert nem tekinthetjük pontszerűnek, akkor – az O tengelyre vonatkozó – tehetlenségi nyomatéka a Steiner-tétellel határozható meg:

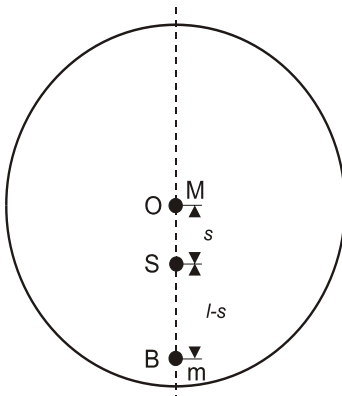
$$\Theta_b = \frac{1}{2}mr^2 + ml^2, \quad (12)$$

ahol r a henger sugara.

Határozzuk meg a tárcsa-henger rendszer s tömegközéppontjának a forgástengelytől (a tárcsa középpontjából) mért $s = \overline{OS}$ távolságát!

A 2. ábra alapján fennáll, hogy $M \cdot \overline{OS} = m \cdot \overline{SB}$, ahol $\overline{SB} = \overline{OB} - \overline{OS} = l - s$, így

$$s = \frac{ml}{m + M}. \quad (13)$$



2. ábra

A (10), (11) és (13) összefüggések felhasználásával a lengésidőre a

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{(M+m)g}} = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_0 + ml^2}{(M+m)g \frac{ml}{m+M}}} = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_0 + ml^2}{mgl}} \quad (14)$$

összefüggés adódik, és M nem szerepel az összefüggésben. A (14) összefüggés átrendezésével kapjuk, hogy:

$$\Theta_0 = \frac{T^2}{4\pi^2} mgl - ml^2. \quad (15)$$

Ha a henger pontszerűsége már nem áll fenn, pl. ha l R -hez képest kicsi, akkor (15)-ben ml^2 helyett $\frac{1}{2}mr^2 + ml^2$ összefüggéssel kell számolni a (12)-nek megfelelően.

Feladatok:

- 1) Becsülje meg a geometriai méretek felhasználásával a tárcsa tehetlenségi nyomatékát a középpontján átmenő, vízszintes tengelyre vonatkozóan. A tárcsa anyagának sűrűsége 7800 kg/m^3 .
- 2) Mérje meg a kiadott r sugarú henger tömegét levélmérleggel.
- 3) Csavarozza a hengert a tárcsa egyes lyukaiba (l értékeit változtatva), és határozza meg a létrejött fizikai inga lengésidőjét – kis kitérés mellett – több lengésidő együttes méréséből.
- 4) A (15) összefüggés felhasználásával számítsa ki a tárcsa Θ_0 tehetlenségi nyomatékát.
- 5) Hasonlítsa össze a becsléssel és a méréssel kapott Θ_0 tehetlenségi nyomaték-értékeket. Számoljon relatív eltérést.

Ajánlott irodalom:

 Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., 44.§, 45.§

3. Nehézségi gyorsulás mérése reverziós ingával

Célkitűzés:

- A matematikai és a fizikai inga jellemzőinek megismerése.
- A nehézségi gyorsulás kísérleti meghatározása.

Elméleti összefoglaló:

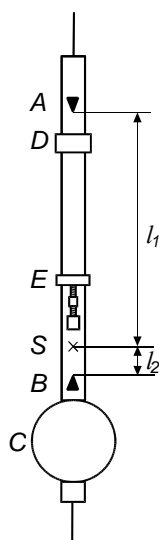
Szabadon eső test gyorsulása a földfelszín adott pontján állandó. Ezt a gyorsulást nehézségi gyorsulásnak nevezzük és g -vel jelöljük. A g értéke függ a Föld tömegeloszlásától, a földrajzi szélességtől és az adott földrajzi pont magasságától is, ugyanis egy adott földrajzi helyen a testre a *Newton*-féle gravitációs erőn kívül hat a centrifugális erő is. Ennek megfelelően a nehézségi gyorsulás a gravitációs és a centrifugális gyorsulások eredője. Ebből következik, hogy a nehézségi gyorsulás iránya csak az egyenlítőn és a sarkokon mutat a Föld középpontja felé.

A reverziós inga egyik legrégebbi formája, amelyet a g nehézségi gyorsulás meghatározására alkalmaztak, *H. Kater*től ered (1818). Ennek a gyakorlaton használt típusa az 1. ábrán látható; egy olyan fizikai inga, amely egy rúdból áll, melyet két, A és B ékkel és egy C nehezéssel láttak el. A D és E nehezékek arra szolgálnak, hogy elmozdításukkal elérjük, hogy az inga lengésideje akár az A , akár a B ék körüli lengetések során megegyezzen.

A fizikai inga egy adott forgástengely körüli T lengésideje

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{mgs}}, \quad (1)$$

ahol m az inga tömege (beleértve az összes rajta lévő nehezéket is), Θ a forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték, s a forgástengely és



1. ábra

az S súlypont közötti távolság és g a nehézségi gyorsulás.

Ezt összehasonlítva egy l hosszúságú matematikai inga $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ lengésidejével, látható, hogy a fizikai inga ugyanúgy leng, mint egy

$$l_r = \frac{\Theta}{ms} \quad (2)$$

hosszúságú matematikai inga. l_r az úgynevezett redukált hossz és ezzel a fizikai inga lengésének periódusideje:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}. \quad (3)$$

A (3) egyenlet felhasználható g mérésére, ha megmérjük az inga lengésidejét, illetve meghatározzuk az l_r hosszat. Ez utóbbi közvetlen mérése nem lehetséges, viszont kihasználhatjuk azt, hogyha a reverziós ingán a D és E súlyokat úgy állítjuk be, hogy az A , illetve a B éknél felfüggesztett inga lengésideje megegyezzen, akkor aszimmetrikus inga esetén a redukált hossz nem lesz más, mint a két ék távolsága.

Ennek belátására induljunk ki az (1) egyenletből. Jelöljük az \overline{AS} , illetve a \overline{SB} szakaszokat l_1 -gyel és l_2 -vel ($\overline{AB} = l_1 + l_2$). Az S súlyponton áthaladó tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot mk^2 alakban írhatjuk fel, ahol m a lengő test tömege, k -t pedig az S körüli "forgási sugárnak" nevezhetjük. Az A , illetve a B pontokon átmenő (az S súlyponton átmenő tengellyel párhuzamos) tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok *Steiner* tétele szerint $\Theta_1 = mk^2 + ml_1^2$, illetve $\Theta_2 = mk^2 + ml_2^2$ nagyságúak. Ha a lengésidők megegyeznek ($T_A = T_B$), akkor az (1) egyenletből a

$$2\pi\sqrt{\frac{mk^2 + ml_1^2}{mgl_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{mk^2 + ml_2^2}{mgl_2}} \quad (4)$$

összefüggés adódik. A (4) egyenletet átrendezve kapjuk, hogy

$$k^2 = l_1 l_2, \quad (5)$$

amelyet, ha a (4) egyenlet bármelyik oldalába behelyettesítünk, azt kapjuk, hogy a fizikai inga lengésideje:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_1 + l_2}{g}}. \quad (6)$$

azaz $l_r = l_1 + l_2$ -vel.

Ezek a megfontolások csak aszimmetrikus ingák esetén (tehát $l_1 \neq l_2$) érvényesek. Amennyiben az S súlyponton átmenő és az \overline{AB} szakaszra merőleges síkra nézve szimmetrikus az inga, pl. homogén tömegeloszlású rúd, akkor az inga bármelyik pontjára és annak S -re vonatkoztatott tükörképére adódó lengésidők meg fognak egyezni, annak ellenére, hogy a két pont közötti távolság nem feltétlenül egyenlő az inga redukált hosszával. Innen látható, hogy a C nehezéknek az a feladata, hogy az ingát aszimmetrikussá tegye, azaz az inga súlypontját az A és B ékek közötti szakasz felezőpontjától eltávolítsa.

A reverziós inga alkalmazásakor az egyik legfontosabb rendszeres hiba a véges amplitúdó miatt fellépő hiba. Az ingára vonatkozó harmonikus megoldást a mozgásegyenletek csak akkor adják, amikor az inga „végtelenül kicsiny” amplitúdóval leng. Véges amplitúdó esetében figyelembe kell venni a lengés anharmonizmusát. Az elmélet szerint a lengésidő

$$T = T_0 \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right], \quad (7)$$

ahol φ_0 a radiánokban mért szögamplitúdó, a lengés A amplitúdójának és az inga l_r hosszának a hányadosa ($\varphi_0 = A/l_r$). Kis kitéréseknél az egyszerűbb

$$T = T_0 \left[1 + \frac{\varphi_0^2}{16} \right] \quad (8)$$

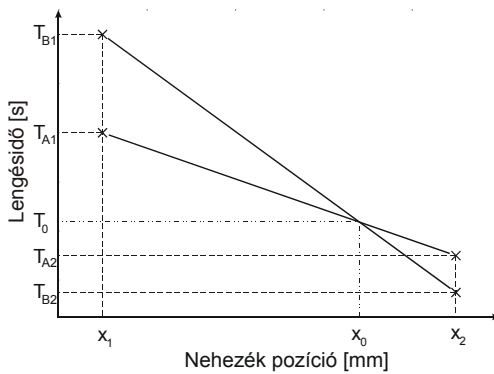
összefüggés is jó közelítéssel teljesül.

Mérés menete:

Az E nehezéket a rajta lévő nóniusz segítségével állítsuk be meghatározott beosztásokra, és mérjük meg a periódusidőket az A és B ékek körüli lengetésekre vonatkozóan. A nehezék elmozgatásakor nemcsak a súlypont helyzetét, s ezzel együtt a lengésidőket változtatjuk meg, hanem a súlyponton áthaladó tengelyre vonatkoztatott

tehetetlenségi nyomatékot, azaz m konstans volta miatt a k mennyiséget is. A nehezék fokozatos elmozdításakor kapott T_A , T_B értékpárok mérésekor azt találjuk, hogy a lengésidők a nehezék helyzetét mutató skálabeosztás függvényeként más meredekséggel változnak. Az így kapott görbék metszéspontja adja a (3) egyenletbe helyettesíthető lengésidőt.

A mérés pontosságának növelése céljából célszerű kis lengésszámú mérésekből a két görbe menetét felvenni, és a metszéspontot közelítőleg meghatározni, majd e metszéspont kis környezetében nagyobb lengésszámú mérésekkel mérni az A és B ékekre vonatkozó periódusidőket. Ábrázolva a kapott lengésidőket a nehezék helyzetének



2. ábra

függvényében a mért rövid szakaszon a függvényeket lineárisnak tekinthetjük, és a kapott egyenesszakaszok metszéspontját koordináta geometriai módszerekkel határozzuk meg.

A 2. ábrán látható grafikon jelöléseinek megfelelően legyenek T_{A1} és T_{A2} az A forgástengelyre vonatkozó lengésidők, T_{B1} és T_{B2} a B forgástengelyre vonatkozó lengésidők a nehezék x_1 és x_2

pozícióiban. Az A és B tengelyekre vonatkozó egyeneseket megadó egyenletek:

$$T = \frac{T_{A2} - T_{A1}}{x_2 - x_1}(x - x_1) + T_{A1} \quad (9)$$

és

$$T = \frac{T_{B2} - T_{B1}}{x_2 - x_1}(x - x_1) + T_{B1}. \quad (10)$$

A két egyenes metszéspontjának koordinátái (T_0, x_0) mindkét egyenletet kielégítik. A (9) és (10) egyenletekben T és x helyére T_0 -t és x_0 -t írva, x_0 kifejezhető mindkét egyenletből. A két egyenletet egyenlővé téve T_0 -ra a következő összefüggést kapjuk:

$$T_0 = \frac{T_{A1}T_{B2} - T_{A2}T_{B1}}{T_{A1} + T_{B2} - T_{A2} - T_{B1}}. \quad (11)$$

A lengésidőket mm papíron nagy felbontással ábrázolva a metszéspont koordinátája (T_0) nagy pontossággal közvetlenül is leolvasható.

Feladatok:

- 1) Számítsa ki, hogy az 1000 mm-es ingát legfeljebb mekkora amplitúdóval szabad kitéríteni ahhoz, hogy a g meghatározásának az ingamozgás anharmonizmusából származó relatív hibája $3 \cdot 10^{-4}$ -nél kisebb legyen.
- 2) Mérje meg a reverziós inga A és B tengelyeihez tartozó T_A és T_B , lengésidőket a nóniusszal ellátott mozgatható E súly $x = 110, 150, 200, 250, 300$ mm-es állásainál. Itt elég 50 lengés idejét mérni. (Akkora kezdeti amplitúdót kell alkalmazni, hogy az anharmonizmusból származó relatív hiba $3 \cdot 10^{-4}$ -nél kisebb legyen.)
- 3) Ábrázolja a T_A és T_B lengésidőket az E súly helyzetének függvényében. Az ábráról határozza meg az E súly azon x_0 helyzetét, amelyre $T_A = T_B$.
- 4) Mérje meg a T_A és T_B lengésidőket az E nehezék $x = x_0 + 20$ mm és $x = x_0 - 20$ mm-es helyzetében. Itt 200 lengés idejét kell mérni.
- 5) A fenti mérési adatokból határozza meg grafikus módszerrel és (11) alapján T_0 értékét, és ebből számolja ki g -t.
- 6) Elemezze a mérés pontosságát befolyásoló tényezőket.

Ajánlott irodalom:

📖 Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., 24. §, 45. §

4. Torziómodulus meghatározása torziós rezgésekből; tehetetlenségi nyomaték meghatározása torziós ingával

Célkitűzés:

- A torziós inga működési elvének megismerése. A torziós inga paramétereinek meghatározása a rezgésidők mérésével.
- Testek tehetetlenségi nyomatékának kísérleti meghatározása.

Elméleti összefoglaló:

Egy pontrendszer Z tengelyre vonatkoztatott *tehetetlenségi nyomatékának* definíciója:

$$\Theta = \sum m_i l_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2), \quad (1)$$

ahol m_i az i -edik tömegpont tömege, x_i, y_i pedig a koordinátái. Merev test esetén m_i helyett $\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i$ tömegelemet használunk, ahol ΔV_i a térfogatelem, ρ_i az anyag sűrűsége. Így a fenti egyenlet a következő alakú lesz:

$$\Theta = \sum \rho_i l_i^2 \Delta V_i. \quad (2)$$

A $\Delta V_i \rightarrow 0$ határesetben a tehetetlenségi nyomaték az alábbi összefüggéssel számolható:

$$\Theta = \int_V \rho l^2 dV = \int_V \rho (x^2 + y^2) dV. \quad (3)$$

Például egy homogén, vékony, q keresztmetszetű, l hosszúságú rúd esetén a rúdra merőleges és az S súlyponton átmenő tengelyre vonatkozólag a tehetetlenségi nyomaték, mivel $\Delta V = q dx$:

$$\Theta = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \rho x^2 q dx = \rho q \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x^2 dx = \rho q \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} = \rho q \frac{l^3}{12} = \frac{1}{12} ml^2, \quad (4)$$

mivel $\rho ql = m$ a rúd tömege.

Az előzővel párhuzamos, de a rúd végpontján átmenő tengelyre vonatkozólag az integrálást 0-tól l -ig végezve:

$$\Theta = \rho q \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} ml^2. \quad (5)$$

Hasonlóképpen, integrálással számítható ki a szabályos geometriájú testek tehetlenségi nyomatéka. A számításból adódó formulákat a következő táblázat tartalmazza.

TEST	TENGELY	Θ
Tömör henger (m tömeg, R sugár, h magasság)	Forgási szimmetriatengely Erre merőleges súlyponttengely	$\frac{1}{2} mR^2$ $\frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} mh^2$
Derékszögű egyenes hasáb (m tömeg, élhosszúság: a, b, c)	c éllel párhuzamos súlyponttengely	$\frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$
Gömb (m tömeg, R sugár)	Bármelyik súlyponttengely	$\frac{2}{5} mR^2$
Egyenes körkúp (m tömeg, R sugár)	Szimmetriatengely	$\frac{3}{10} mR^2$

A *torziós inga* általános esetben egy vékony szálon függő, torziós rezgéseket végző merev test. A felfüggesztő szál az elforgatott merev testre forgatónyomatékot gyakorol, ezért ha az ingát kimozdítjuk egyensúlyi helyzetéből, majd magára hagyjuk, forgási rezgéseket végez.

Térítsük ki a rendszert egy kicsiny φ szöggel egyensúlyi helyzetéből, ekkor a szál a benne létrejövő torzió miatt egy φ -vel arányos visszatérítő nyomatékot fejt ki a szálon függő testre:

$$M = -D^* \varphi. \quad (6)$$

A D^* mennyiség az ún. direkciós nyomaték. A torziós ingára írjuk fel a merev testek forgására vonatkozó

$$M = \Theta \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad (7)$$

általános mozgásegyenletet. Ebbe behelyettesítve (6)-ot, kapjuk, hogy:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{D^*}{\Theta} \cdot \varphi, \quad (8)$$

ahol Θ a torziós inga tehetetlenségi nyomatéka.

Az egyenlet formailag a fizikai inga mozgásegyenletével egyezik meg, melynek megoldása kicsiny szögek esetén: $\varphi(t) = \varphi_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$. Ebben a rezgés ω körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\frac{D^*}{\Theta}}. \quad (9)$$

A rezgésidő pedig:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{D^*}}. \quad (10)$$

Ezen összefüggés alapján a rezgésidő megméréssel ismert tehetetlenségi nyomatékú rendszert alkalmazva a torziós ingát jellemző direkciós nyomaték kiszámolható vagy pedig ismert direkciós nyomatékú inga rezgésidőjét megmérve tehetetlenségi nyomatékot tudunk meghatározni.

Mérés menete:

A (10) egyenlet két ismeretlent tartalmaz. A gyakorlat során D^* meghatározásához a (10) egyenletet megkettőzzük oly módon, hogy kihasználva Θ additivitását, ismert módon megváltoztatjuk a rezgő test tehetetlenségi nyomatékát. A felfüggesztett acél-szálla rögzített vízszintes rúdra kettő darab, egyenként m tömegű testet helyezünk a forgástengelytől első esetben s_1 , a második esetben s_2 távolságra. A távolságokat a rúdon lévő vajatok jelzik. A két esetben a tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_1 = \Theta + 2ms_1^2, \text{ illetve } \Theta_2 = \Theta + 2ms_2^2, \quad (11)$$

ahol Θ a vízszintes rúd tehetetlenségi nyomatéka (a tehetetlenségi nyomaték additív mennyiség). A két esetben az inga rezgésidője:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta + 2ms_1^2}{D^*}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta + 2ms_2^2}{D^*}}. \quad (12)$$

A megmért rezgésidőkből a direkciós nyomaték a (12) egyenletek átrendezésével az alábbi egyenlet szerint számolható:

$$D^* = 8m\pi^2 \frac{s_2^2 - s_1^2}{T_2^2 - T_1^2} \quad (13)$$

Elméleti tanulmányainkból ismeretes, hogyha egyik végén rögzített, l hosszúságú, R sugarú fémszál (rúd) szabad végére $M' = -M$ forgatónyomatékot gyakorlunk, akkor a szabad vég szögelfordulása:

$$\varphi = \frac{2l}{GR^4\pi} M' \quad (14)$$

Ezt összevetve (6)-tal, adódik, hogy

$$G = \frac{2}{\pi} \frac{l}{R^4} D^* \quad (15)$$

ahol G a fémszál anyagi minőségére jellemző állandó, a torziómodulus.

Ha a már ismert D^* direkciós nyomatékú torziós szátra valamilyen merev testet függesztünk, ennek Θ tehetetlenségi nyomatékát (10) alapján meghatározhatjuk, ha megmérjük rezgésének periódusidejét (T):

$$\Theta = \frac{D^* \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} \quad (16)$$

Feladatok:

- 1) Határozza meg a kiadott szálak D^* direkciós nyomatékát és G torziómodulusát.
 - a) Mérje meg a szálak hosszát, valamint 10 különböző helyen az átmérőjét. Az utóbbi mérésénél a harmadik értékes jegyet is becsülje meg. A mérésnél vegye figyelembe a mikrométercsavar nullhibáját.
 - b) Mérje meg a felfüggesztendő fémrúdon a belső és külső vajatok forgástengelytől való távolságát és a próbatestek tömegét.
 - c) Határozza meg a torziós rezgések periódusidejét n számú rezgésidő együttes méréséből. n -et úgy válassza, hogy a mért idők 30-60 s között legyenek. Minden mérést háromszor végezzen el.
 - d) A mérési adatokból számolja ki a D^* és G értékét.

- e) Hasonlítsa össze a kapott G értékeket az acél torziómodulusának táblázatból kikereshető értékével. Számolja ki a relatív eltérést.
- 2) A D^* értékének ismeretében használja a torziós ingát merev testek tehetetlenségi nyomatékának meghatározására.
 - a) Határozza meg két kiadott test tehetetlenségi nyomatékát.
 - b) Hasonlítsa össze a tehetetlenségi nyomaték fenti módon mért értékét a tömeg és a geometriai adatok felhasználásával számítható értékkel. Számolja ki a relatív eltérést.

Ajánlott irodalom:

 Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., 59.§, 60.§, 61.§

5. Csillapodó- és kényszerrezgések vizsgálata Pohl-féle készülékkel

Célkitűzés:

- Csillapodó- és kényszerrezgések kísérleti vizsgálata, sebességfüggetlen csillapítás hatásának demonstrálása.

Elméleti összefoglaló:

A legegyszerűbb rezgőmozgás a harmonikus rezgés, melyet az

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \phi) \quad (1)$$

egyenlet ír le, ahol x az egyensúlyi helyzettől mért pillanatnyi kitérés, A a rezgés amplitúdója, ω_0 a körfrekvenciája, ϕ pedig a kezdőfázisa. Ilyen rezgés akkor jön létre, ha egy m tömegű pontszerű testre olyan F erő hat, amely a kitéréssel arányos és azzal ellentétes irányú, vagyis $F = -D \cdot x$. Ekkor az $\omega_0 = \sqrt{D/m}$ mennyiséget bevezetve a dinamika alapegyenletéből a következő differenciálegyenlethez jutunk:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 \cdot x \quad (2)$$

Az (1) egyenlet (2)-be történő helyettesítésével meggyőződhetünk arról, hogy (1) a (2) egyenlet egy megoldását írja le.

A gyakorlatban a különböző típusú súrlódások hatása miatt nem tökéletesen harmonikus rezgés, hanem csillapított harmonikus rezgés jön létre. Matematikailag egyszerűen kezelhető a sebességgel arányos $F_s = -k \cdot dx/dt$ csillapító erő hatása. Ilyen esetben a mozgást a

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \cdot \beta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = 0 \quad (3)$$

differenciálegyenlet írja le, amelyben az egyszerűbb alakú megoldás érdekében bevezettük a $\beta = k/(2m)$ csillapítási tényezőt. A (3) egyenlet egy megoldása nem túl erős

($\beta < \omega_0$) csillapítás esetén:

$$x(t) = A \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega_s t + \phi), \quad (4)$$

ahol $\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Mint látható a csillapítás hatására a rezgés $A \cdot e^{-\beta t}$ amplitúdója idővel exponenciálisan csökken és a rezgés frekvenciája, – mely időben állandó – kisebb, mint a csillapítás nélküli esetben. (4)-ből megállapítható továbbá, hogy a kitérés nem akkor éri el maximális értékét, amikor a szinuszfüggvény argumentuma $\pi/4 + m\pi$ (ahol m egészszám), hanem ennél korábban. Az egymást követő egyirányú maximális kitérések hányadosa, az ún. csillapodási hányados állandó, nevezetesen:

$$K = \frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T} \quad (5)$$

ahol $T = 2\pi / \omega_s$ a rezgésidő. Bármely két olyan időpontban, amelyek különbsége T a rezgés azonos fázisban van, de a megfelelő két kitérés nem azonos mértékű, hanem egymás K -szorososa. Emiatt a T rezgésidőt most nem nevezhetjük periódusidőnek. A csillapított rezgések jellemzésére szokás használni még a

$$\Lambda = \ln K = \beta \cdot T \quad (6)$$

logaritmikus dekrementumot is.

Az eddig tárgyalt rezgések ún. szabad rezgések voltak. Kényszerrezgésről beszélünk akkor, ha az eddig figyelembe vett erőkon kívül egy periodikusan változó erő is hat a rendszerre. A legegyszerűbben leírható és egyszerűen megvalósítható esetben ez a periodikus kényszer erő egy harmonikus erő, azaz $F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega t) = m \cdot a_0 \cdot \sin(\omega t)$ alakú. Ekkor a mozgást a következő differenciálegyenlet határozza meg:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \cdot \beta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = a_0 \cdot \sin(\omega t). \quad (7)$$

Ennek az egyenletnek $\beta < \omega_0$ esetén általános megoldása

$$x(t) = A \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega_s t + \phi) + A_k \cdot \sin(\omega t - \delta) \quad (8)$$

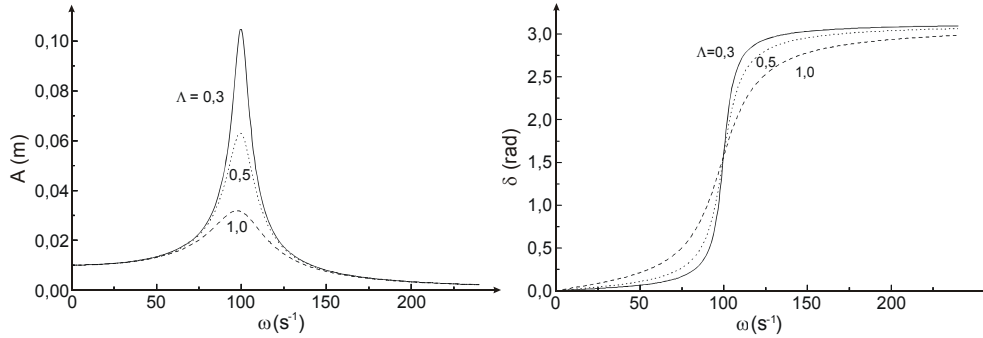
alakú. (8) jobb oldalának első tagja egy csillapodó rezgőmozgást ír le. Ez a csillapítás mértékétől függő idővel elhal, és csak a kényszerrezgést leíró második tag marad jelentős. Ez a tag (a rendszer sajátfrekvenciájától függetlenül) a gerjesztő erővel azonos frekvenciájú harmonikus rezgést ír le, amelynek fázisa δ értékkel késik a gerjesztés

fázisához képest. A kényszerrezgés amplitúdója és fáziskésése a (9) ill. (10) egyenletek szerint függ az alkalmazott kényszer frekvenciájától.

$$A_k = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot \beta^2 \cdot \omega^2}} \quad (9)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2 \cdot \beta \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (10)$$

A (9) és (10) által meghatározott függvények menetét az 1.a, illetve 1.b ábra mutatja $\omega_0 = 100 \text{ s}^{-1}$, $a_0 = 100 \text{ m/s}^2$ és három különböző csillapítás ($\Lambda = 0,3; 0,5; 1,0$)



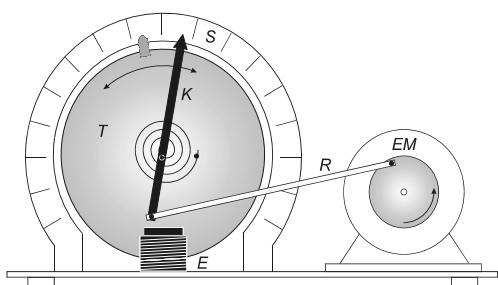
1.a ábra

1.b ábra

fennállása esetén. Jól látható, hogy a kényszerrezgés amplitúdója $\omega = \omega_0$ közelében maximummal rendelkezik, ezt a jelenséget nevezzük rezonanciának. A rezonancia annál kifejezettebb, és élesebb, vagyis az $A(\omega)$ rezonanciagörbe maximuma annál nagyobb és szélessége annál kisebb, minél kisebb a csillapítás. A (9) és (10) egyenletek egyszerű analiziséből megállapítható, hogy a rezgési amplitúdó nem pontosan $\omega = \omega_0$, hanem az $\omega = \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2 \cdot \beta^2}$ rezonancia-körfrekvencia esetén maximális. A kényszerrezgést végző rendszer teljesítményfelvétele az $\omega \cdot A(\omega)$ sebességamplitúdó négyzetével arányos, aminek maximuma, vagyis sebességrezonancia van $\omega = \omega_0$ frekvenciájú kényszer esetén. Ugyanennél az értéknél a fáziskésés $\delta = \pi/2$ a csillapítástól függetlenül. A $\delta(\omega)$ görbék annál gyorsabb átmenetet mutatnak e pont körül, minél kisebb a csillapítás.

Mérés menete:

A csillapodó- és kényszerrezgések vizsgálatára a *Pohl*-féle készüléket használjuk, amelynek a felépítése a 2. ábrán látható. A *T* tárcsa vagy kerék vízszintes tengely körüli forgási rezgéseket végezhet. Egy, az egyik végén a tárcsához rögzített spirálrugó szolgáltat a kitéréssel arányos erőt, ill. forgatónyomatékokot. A tárcsa egy *E* elektromágnes sarkai között mozog. A mágneses tér a mozgó fémtárcsában keltett örvényáramok révén a sebességgel arányos fékezőerőt, ill. forgatónyomatékokot fejt ki a tárcsára. A fékezés nagysága az elektromágnesen áthaladó áram erősségével arányos. Annak érdekében, hogy kényszerrezgéseket is lehessen vizsgálni, a spirálrugó másik (nem a tárcsához rögzített) vége egy *K* karhoz kapcsolódik, amelyet az *R* rúd közvetítésével az *EM* elektromotor tengelyére szerelt excenter mozgat. A kényszer frekvenciája (az elektromotor fordulatszáma) az elektromotor áramának változtatásával szabályozható. A kényszert közvetítő kar végén és a forgómozgást végző tárcsán egy-egy mutató található. Ezeknek a



2. ábra

körív alakú *S* skálához viszonyított helyzetéből meghatározható a kényszer és a rezgés fázisa és nagysága.

2. ábra

Feladatok:

- 1) Kézzel térítse ki a tárcsát, és mérje meg ötször öt teljes rezgésből a T_0 rezgésidőt, majd határozza meg az ω_0 sajátfrekvenciát. Mérjen meg legalább hat, egymást követő egyirányú maximumot (x_{0i}).
- 2) A csillapítást létrehozó elektromágneset az ampermérőn keresztül csatlakoztassa a tápegység megfelelő kimenetéhez. Végezze el az 1) feladat alatt ismertetett mérést úgy, hogy a tápegységen lévő potenciométer segítségével a csillapító mágnes ára-

mát $I_{cs} = 0,5$ A-re állítva csillapítja az inga rezgését. Mérendő: T , x ; számítandó a rezgés ω körfrekvenciája.

- 3) Ábrázolja a két esetre a Λ_0 , illetve Λ logaritmikus dekerementumot a kitérés sorszámának függvényeként. Az így nyert görbék kezdeti menetéből számolja ki a β_0 és β csillapítási tényező értékeit. Magyarázza meg, hogy miért változnak a csillapítási tényezők.
- 4) Csatlakoztassa az időben periodikus kényszert biztosító elektromotort a tápegységhez. A motor működtetésével mérje ki a rezonancia-görbét. (A motor fordulatszáma a tápegységen található szabályozó potenciométerrel állítható.) A csillapítás áramerősség-értéke legyen 0,0 A és 0,5 A. A $T_k = [1,2; 6,0$ s] intervallumban mérjen legalább húsz alkalommal, a rezonancia közelében sűrűbben, a rezonanciától távol pedig egy-két pontban. Az amplitúdók mérésénél az egy perc alatt megfigyelhető maximális értékeket olvassa le. Mérendő mennyiségek: a kényszer ω_k körfrekvenciái (10 periódusidőt mérve), az A_k amplitúdó-maximumok, a nullátmenetek Δt időkülönbsége (a tárcsához illetve a kényszert közvetítő karhoz rögzített mutatók egyensúlyi helyzetben való áthaladásának időkülönbsége).
- 5) Készítse el az $A_{\omega k}(\omega)$ és $A_k(\omega)$ rezonanciagörbét! Számítsa ki a $\phi = \Delta t \omega_k$ fázist a 4. feladat szerint mért adatok felhasználásával. Ábrázolja a fázis - kényszer körfrekvencia grafikont.

Ajánlott irodalom:

 Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., 88.§, 89.§

6. Young-féle modulus meghatározása megnyúlás méréséből

Célkitűzés:

- Szilárd anyagok rugalmassági jellemzőinek vizsgálata.

Elméleti összefoglaló:

Ha egy q keresztmetszetű, l hosszúságú fémszála F erőt fejtünk ki hosszirányban, akkor a szál Δl megnyúlását tapasztaljuk. A $\Delta l/l$ mennyiséget relatív megnyúlásnak, a $\sigma = F/q$ hányadost mechanikai feszültségnek nevezzük.

Természetesen a húzóerőre merőleges irányban is történik változás. Ha kezdetben a szál átmérője d , akkor ez a megnyúlás hatására Δd -vel csökken. A alább definiált mennyiséget nevezzük *Poisson*-számnak vagy haránt-összehúzóási együtthatónak:

$$\mu = \frac{-\Delta d/d}{\Delta l/l}. \quad (1)$$

Belátható, hogy μ értéke nem lehet nagyobb 0,5-nél. A hossz- és keresztirányú méretek változásai együttesen azt eredményezik, hogy nyújtásnál a térfogat nő, összenyomásnál pedig csökken. A relatív térfogatváltozásra a következő összefüggés nyerhető:

$$\frac{\Delta V}{V} = (1 - 2\mu) \frac{\sigma}{E}. \quad (2)$$

Ha a testet olyan erőhatás éri, hogy a test felületének minden egyes pontjában a σ állandó, akkor a relatív térfogatváltozás:

$$\frac{\Delta V}{V} = 3(1 - 2\mu) \frac{\sigma}{E}. \quad (3)$$

A $3(1 - 2\mu)/E$ mennyiséget κ -val jelöljük és kompresszibilitásnak nevezzük. Mértékegysége: m^2/N .

A megnyúlásnak több szakaszát különböztetjük meg. Kis mechanikai feszültségek esetén a relatív megnyúlás arányos σ -val. Ha ezen a lineáris szakaszon belül – azaz a rugalmassági határon belül – maradunk, akkor az erő megszűnésével a szál visszatér eredeti feszültségmentes állapotába. Megfigyelhető azonban, hogy a húzóerő megszűnése után bizonyos időnek kell eltelnie ahhoz, hogy a vizsgált szál eredeti alakját jó közelítéssel visszanyerje. A gyakorlatban, ha igen pontos mérést végzünk, akkor tapasztalhatjuk, hogy még így is marad a szálnak megnyúlása. Ekkor az eredetivel ellentétes irányú erővel lehet csak visszaállítani a kezdeti állapotot. Ezt a jelenséget hiszterézisnek nevezzük és az anyag szerkezetében végbemenő súrlódási folyamatokra vezethető vissza.

A σ -t növelve először egy olyan szakasz következik, amelyben a húzóerő megszűnése után sem tér vissza a szál a kiindulási hosszához (maradandó alakváltozás). Még nagyobb mechanikai feszültségek esetén pedig az anyag képlékennyé válik, a relatív megnyúlás gyorsan nő. Az utolsó szakasz végén a szál elszakad. Az ekkor ható erő és az eredeti keresztmetszet hányadosát nevezzük szakító szilárdságnak.

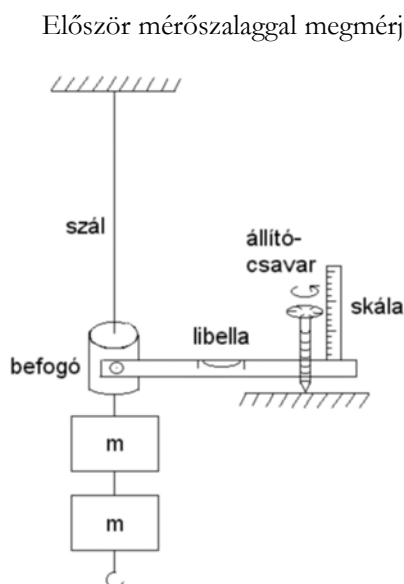
A rugalmassági határon belül érvényes *Hooke*-törvénye:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{q}. \quad (4)$$

Itt E az anyagi minőségre jellemző állandó, neve: *Young*-modulus. Mértékegysége N/m^2 . Az egyenletben szereplő mennyiségek alapján látható, hogy hosszúság jellegű mennyiségek, továbbá az erő mérésével az anyagi minőségre jellemző E állandót meghatározhatjuk. E pontos meghatározását jelentősen befolyásolhatják a számban rejlő esetleges szerkezeti hibák, valamint a szál egyenetlenségei!

A kísérleti elrendezés és a mérés menete:

A gyakorlaton egy acélszálát használunk, amelynek felső vége rögzített. Az alsó végére függesztjük a terhelő tömegeket. A szál egy közbülső pontjához a libella egyik végét rögzítjük. Ennek segítségével mérhetjük a megnyúlást.



1. ábra

Először mérőszalaggal megmérjük a szál azon hosszát, aminek a megnyúlását vizsgálni fogjuk. A szál átmérőjét több helyen megmérjük a mikrométercsavar segítségével és ezekből kiszámoljuk a szál keresztmetszetét. A szál kezdeti deformáltságát kiküszöbölendő, a szál végére 1-2 kg tömeget akasztunk. Ennek a súlyából származó húzóerőhöz tartozó libella állás vízszintes helyzetét definiáljuk nullhelyzetnek, melyet a libella végén lévő századmilliméter pontosságú körskálával ellátott állítócsavar helyzetével állítunk be. Minden terheléshez tartozó megnyúlást ehhez a nullhelyzethez viszonyítunk. Ezek után egy egységgel növelve a húzóerőt, a libella kimozdul vízszintes helyzetéből. Az állítócsavar segítségével újra

beállíthatjuk a vízszintes helyzetet. Ennek eléréséhez a csavart pontosan annyival kell állítani, amennyi az adott húzóerőhöz tartozó megnyúlás. Ilyen módon meghatározhatjuk minden húzóerőhöz a Δl megnyúlást.

Feladatok:

- 1) Határozza meg a szál azon hosszát, amelynek a megnyúlását mérni fogja.
- 2) Mikrométercsavar segítségével mérje meg a szál átmérőjét tíz különböző helyen. Vegye figyelembe a mikrométercsavar esetleges nullhibáját. Ezen értékekből számolja ki a szál keresztmetszetét és ennek hibáját a hibaterjedésre vonatkozó formula segítségével.
- 3) A szál megnyúlását öt különböző terhelés mellett a libella és a mellé rögzített körskálával ellátott csavar segítségével mérje meg. A megnyúlásokat létrehozó test tömege: 2, 4, 6, 8, 10 kg legyen. A terhelést csökkentve is mérje meg a megnyúlá-

sokat. Ezt a mérésorozatot háromszor végezze el. A megfelelő adatok átlagolásával számolja ki az egyes terhelésekhez tartozó *Young*-modulus értékeit. Ha ezen értékekben valamilyen tendencia látszik, próbálja értelmezni.

- 4) Ábrázolja a terhelés növelésekor és csökkentésekor kapott relatív megnyúlásokat a mechanikai feszültség függvényében. Ezen grafikonról is határozza meg a *Young*-modulus értékét. Értelmezze a grafikont (tengelymetszet, stb.).

Megjegyzés:

A mérés során végig ügyeljen arra, hogy az eszköz függőleges helyzetű legyen. A megnyúlást végző testek ne érjenek a tartó szárakhoz.

Ajánlott irodalom:

 Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., 60.§, 63.§

7. Folyadékok felületi feszültségének meghatározása

Célkitűzés:

- Víz felületi feszültségének meghatározása kapilláris emelkedés módszerével.
- Hibaszámítás gyakorlása.

Elméleti összefoglaló:

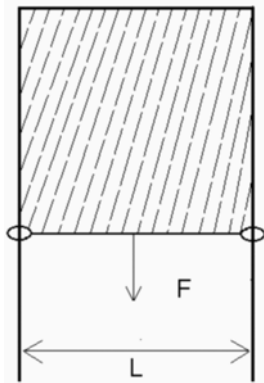
A folyadék molekulái között ható vonzóerők hatótávolsága $d = 10^{-8}$ m nagyságrendű. Azon erők eredője, amelyek a folyadék belsejében lévő molekulákra hatnak – szimmetria okok miatt – zérus. A felszínen és az edény falánál lévő részecskékre viszont a molekulák d sugarú környezetéből már nem csak folyadék molekulák hatnak, hanem az edény falát alkotó részecskék, illetve a folyadék feletti teret kitöltő gázmolekulák is. A folyadék-gáz határrétegben lévő részecskékre ható erők (kohéziós és adhéziós) eredője olyan, hogy irányuk a folyadék belseje felé mutat, így újabb részecskéket csak munkavégzéssel tudunk ebbe a rétegbe juttatni. Ebből következik, hogy az ebben a határrétegben lévő részecskéknél nagyobb a potenciális energiájuk, mint a folyadék belsejében lévőeknek. Ezt a többlet energiát felületi energiának nevezzük, amely energia arányos a felszínen lévő molekulák számával, tehát a felület nagyságával is. Azaz a felület Δq -val való megnövelésékor a felület energiájának növekedése:

$$\Delta E = \alpha \Delta q \quad (1)$$

Az α -t fajlagos felületi energiának vagy felületi feszültségnek is nevezzük. Mértékegysége J/m^2 vagy N/m .

Ez utóbbi mértékegység értelmezéséhez vizsgáljuk meg, hogy mi történik, ha szappanoldatba mártunk egy olyan drótkeretet, melynek egyik oldala el tud mozdulni az 1. ábra szerint.

Azt tapasztaljuk, hogy erőt kell kifejtenünk ahhoz, hogy megakadályozzuk a szappanhártya összehúzódását, vagyis az L hosszúságú oldal elmozdulását. A mérések



1. ábra

alapján ez az erő csak az elmozdulni tudó oldal hosszúságától függ, mégpedig ezzel arányos. Tehát nem függ a felület nagyságától:

$$F = 2\alpha L \quad (2)$$

A (2) egyenletben azért van a kettővel való szorzás, mert a hártyának két szabad felszíne van. Hagyjuk a drótkeret szabadon mozgó oldalát gyorsulás nélkül Δx -szel elmozdulni. Ebben az esetben a szappanhártya által végzett W munkát a felületi energia csökkenése fedezi:

$$W = F\Delta x = 2\alpha L \Delta x = \alpha \Delta q = \Delta E, \quad (3)$$

ahol felhasználtuk, hogy a szappanhártya szabad felülete $\Delta q = 2L\Delta x$ -szel változott meg.

Vizsgáljunk meg egy szappanbuborékot. Tudjuk, hogy benne a környezethez viszonyítva túlnyomás van, amit kísérletileg ki is mutathatunk, ha a buborékba kis csövecskét juttatunk. Azt tapasztaljuk, hogy a buborék „leenged”. Tehát a buborékban uralkodó nyomás (p_b) felírható a külső légnyomás (p_0) és egy bizonyos túlnyomás (p_t) összegeként:

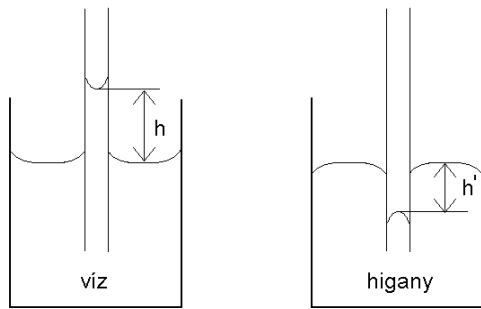
$$p_b = p_t + p_0. \quad (4)$$

A (4) egyenletben szereplő p_t túlnyomás a felületi feszültség miatt lép fel, értéke $p_t = 4\alpha/R$, amely a görbületi nyomás kétszerese és iránya a görbületi középpont felé mutat. A kettős faktor azért lép fel ismét, mert a szappanhártyának két szabad felszíne van. Fontos megjegyezni, hogy a sugárral fordítottan arányos a buborékban lévő túlnyomás.

Vizsgáljuk meg, mi történik, ha kis belső átmérőjű cső, kapilláris merül folyadékba.

A 2. ábrán megfigyelhetjük, hogy üveg kapillárisokban a külső folyadékszinthez képest a folyadék magasabban (alacsonyabban) helyezkedik el és a felszíne, ún. meniszkusza felülről nézve homorú (domború). Az a esetben a folyadékot nedvesítőnek, a b esetben nem nedvesítőnek nevezzük. A folyadék szabad felszíne a folyadék ré-

szecskékre ható erők eredőjére mindig merőleges. Adott edény és folyadék esetén az



1. ábra

edény fala közelében lévő folyadék részecskére a fal részecskéi által és a folyadék saját részecskéi által kifejtett erők hatnak. Az erők eredője határozza meg a folyadék felszínét. Ezen erők különbözősége okozza, hogy a folyadékfelszín eltérő módon alakul az edény falánál, különböző folyadékoknál. Jól ismert tény, hogy vizet, illetve higanyt üveglapra

csepegtetve az alábbi jelenséget tapasztaljuk:

A δ *illeszkedési szög* (a folyadékfelszínnek a fallal való érintkezési pontján átfektetett

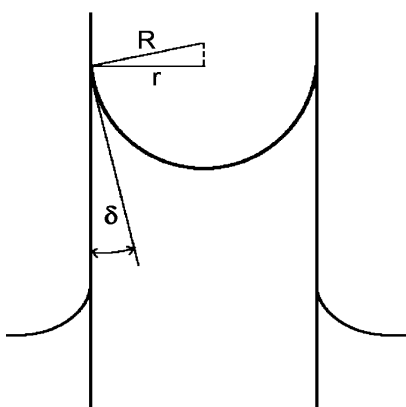


3. ábra

érintősíkjának és a fal érintősíkjával bezárt szöge) nedvesítés esetén hegyesszög, nem nedvesítés esetén tompa szög (pl. higany - üveg esetében 138°). Teljes nedvesítés esetén ez a szög 0° .

Egy kapillárisban a folyadék a külső folyadékszinthez képest addig emelkedik fel, illetve süllyed le, míg a kapillárisban fellépő görbületi nyomás egyenlő nem lesz a folyadékoszlop hidrosztatikai nyomásával.

A r sugarú kapillárisban a cső falához δ szöggel illeszkedő folyadék meniszkusza $R = r/\cos \delta$ sugarú gömbfelületként kezelhető. A kapilláris nyomás: $p_1 = 2\alpha/R$, vagyis $p_1 = 2\alpha \cos \delta / r$. A h magasságú és ρ sűrűségű folyadékoszlop hidrosztatikai nyomása pedig: ρgh . Ezen két nyomás egyenlőségéből adódik, hogy az emelkedés magassága:



4. ábra

$$h = \frac{2\alpha \cos \delta}{\rho g r}, \quad (5)$$

ahol g a nehézségi gyorsulás. Teljes nedvesítésnél $\delta = 0$, $\cos \delta = 1$. A h , ρ és r ismeretében meghatározható az α felületi feszültség.

Mérésnél nehézséget jelenthet h pontos meghatározása az edény fala miatt (pl. fénytörés), ezért mérítsünk a folyadékba két kapilláriszt, r_1 és r_2 sugarút. Ekkor a két emelkedési magasság:

$$h_1 = \frac{2\alpha}{\rho g r_1}; \quad h_2 = \frac{2\alpha}{\rho g r_2} \quad (6)$$

Ezen két összefüggésből:

$$\alpha = \frac{(h_1 - h_2) g \rho}{2} \frac{r_1 r_2}{(r_2 - r_1)} \quad (7)$$

Látható, hogy ebben az összefüggésben nem kell külön-külön mérni az emelkedések magasságát, csak a különbségüket, amelyet leolvasó mikroszkóppal mérhetünk meg. A méréseknél vigyázni kell arra, hogy légbuborék ne jusson a kapillárisban lévő folyadékoszlopba.

Mérés menete:

Az okulár mikrométert a 0,1 mm beosztású tárgymikrométerrel hitelesítjük. A hitelesített okulár mikrométerrel megmérjük a kapillárisok belső átmérőjét. A kapillárisokat a vizsgálandó folyadékba merítjük. A kapillárisok másik végére helyezett gumicsövecskével kissé felszívjuk a folyadékot. Ezzel elősegítjük, hogy a folyadék benedvesítse a belső falat, majd hagyjuk a folyadékot visszacsorogni. Leolvasó mikroszkóppal meghatározzuk a két kapillárisban lévő folyadék meniszkusának h_1 - h_2 különbségét.

Feladatok:

- 1) A 0,1 mm-es beosztású tárgymikrométer felhasználásával hitelesítse a leolvasó mikroszkóp okulárjában lévő skálát a nyolcszoros nagyítású objektívet használva.

- 2) A kiadott kapillárisok közül válasszon ki kettőt úgy, hogy azok megfeleljenek a méréshez. Választását a jegyzőkönyvben indokolja.
- 3) A hitelesített okulár mikrométerrel mérje meg a két kapilláris belső átmérőjét a következők figyelembevételével:
 - a kapillárisok keresztmetszete eltérhet a körtől,
 - a kapillárisok vágási felülete egyenetlen,
 - a kapillárisok átmérőjének mérésekor elkövetett hiba jelentős hibát okoz a felületi feszültség értékének számolásakor.
- 4) Számolja ki, hogy a kapillárisok átmérőjében elkövetett 0,1 mm-es hiba mekkora relatív hibát okoz az α felületi feszültség értékében.
- 5) A két kapillárist gondosan mossa ki a következők szerint:
 - a kisebb főzőpohárba töltsön desztillált vizet,
 - vízlégszivattyú segítségével áramoltassa át a kapillárison,
 - a kisebb főzőpohárba töltsön abszolút alkoholt,
 - vízlégszivattyú segítségével áramoltassa át a kapillárison,
 - levegő átáramoltatásával szárítsa ki a kapillárist.

Gondosan ügyeljen mindvégig arra, hogy a kapilláris végeit kézzel ne fogja meg.
Az üvegtálkát először alkohollal, majd desztillált vízzel öblítse át.
- 6) Szintezze a libella segítségével a leolvasó mikroszkópot.
- 7) Töltsön desztillált vizet a tálkába, helyezze a plexi foglalatba a kapillárisokat és a mellékelt gumicső segítségével (mint szemcseppentővel) szívjon fel vizet a kapillárisokba. Az egyensúly beállta után a háromszoros nagyítású objektívvel ellátott leolvasó mikroszkóppal mérje meg a kapillárisokban a folyadékszintek különbségét. A vízfelszívást és a leolvasást háromszor ismételje meg.
A fentebb leírt feladatot háromszor végezze el (minden esetben cserélje ki a tálkában a desztillált vizet)! Így kilenc mérési eredmény lesz.
- 8) Számítsa ki az egyes mérésekhez tartozó felületi feszültségeket, majd határozza meg ezek átlagértékét, szórását és a konfidencia intervallumot.

- 9) Elemezze a fentebb leírt mérési eljárást néhány sorban a mérésiértékelés szemszögéből.

Megjegyzés:

A szükséges adatokat táblázatból vegye; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ értékkel számoljon!

Ajánlott irodalom:

📖 Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., 69.§

📖 Vize László: Fizika gyógyszerész hallgatók részére, 131-147. o.

8. Folyadékviszkózitás hőmérsékleti függésének vizsgálata Höppler-féle viszkoziméterrel

Célkitűzés:

- A folyadékok áramlására vonatkozó törvények áttekintése, és a valódi (nem ideális) folyadékokat jellemző belső súrlódási együttható meghatározása különböző hőmérsékleteken, megismerve ennek során a szükségszerűen használandó ultratermosztátot.

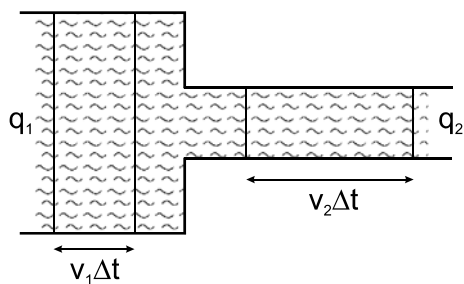
Elméleti összefoglaló:

A folyadékok áramlását leírhatjuk úgy, hogy megadjuk az áramló folyadékrészecske helykoordinátáit az idő függvényében, azaz az ún. pályavonalat, vagy úgy, hogy a folyadékrészecskék sebességét adjuk meg a hely és az idő függvényében, azaz egy sebességteret definiálunk:

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t). \quad (1)$$

Ezt a vektorteret az áramvonalakkal szemléltethetjük, azaz azokkal a görbékkel, melyek érintői az érintési pontban a sebesség irányát adják meg. Az áramlást stacionáriusnak nevezzük, ha az áramlási tér egy adott helyén a sebesség időben állandó.

Az ideális és a nem ideális, összenyomhatatlan folyadékok stacionárius áramlására



1. ábra

érvényes összefüggés az ún. kontinuitási egyenlet. Egy változó keresztmetszetű cső (lásd 1. ábra) q_1 és q_2 keresztmetszetén ugyanazon Δt idő alatt átáramló folyadék térfogatai egyenlők kell, hogy legyenek, tehát

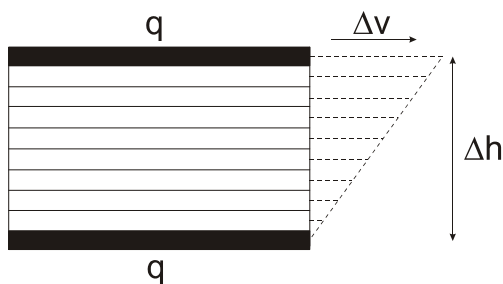
$$q_1 v_1 \Delta t = q_2 v_2 \Delta t, \quad (2)$$

ahol v_1 és v_2 a megfelelő keresztmetszeteknél

lévő sebességeket jelentik. A q_1v_1 és q_2v_2 az adott keresztmetszeten 1 s alatt átáramlott folyadék térfogatát jelentik, amelyet áramerősségnek nevezünk, tehát stacionárius áramlásnál: $I = qv = \text{állandó}$. A kontinuitási egyenlet azt fejezi ki, hogy állandó áramerősségnél a cső keresztmetszete és az átáramló folyadék sebessége fordítottan arányosak.

Nem ideális folyadékok stacionárius áramlásánál az áramlást létrehozó külső erőn kívül tekintetbe kell vennünk a molekuláris erőket is: a folyadékmolekulák közötti kohéziós, ill. a folyadékmolekulák és az edény fala között fellépő adhéziós erőket, valamint az ebből származó súrlódási erőket.

Helyezzünk két jól zsírtalanított üveglap közé vizet (vagy mézet). Ha az egyik



2. ábra

üveglapot oldalirányban mozgatjuk, ehhez jól érezhető erőt kell kifejtenünk. A rögzített helyzetű alsó lemez és a hozzá tapadó vízréteg nyugalomban marad, a felette lévő vízrétegek annál nagyobb sebességgel mozognak, minél távolabb vannak a tapadó vízártyától. Egy adott magasságban fekvő vízréteg sebessége

mindig nagyobb az alatta lévőénél és kisebb, mint a felette lévőé. Az egyes rétegek között súrlódásszerű erő lép fel, melyet belső súrlódásnak, vagy dinamikus viszkózitásnak nevezünk. Ez az erő egyenesen arányos a súrlódó rétegek q felületével, a két réteg közötti Δv sebesség-különbséggel és fordítva arányos a két réteg közötti Δz távolsággal.

$$F = \eta q \frac{\Delta v}{\Delta z}. \quad (3)$$

Az η arányossági tényező a dinamikus belső súrlódási együttható, vagy viszkózitás. Ez a *Newton*-féle súrlódási törvény. A viszkózitás egysége $1 \text{Ns}/\text{m}^2 = 1 \text{Pas}$. A viszkózitás régebbi CGS egysége volt a poise. $1 \text{Pas} = 10 \text{poise}$.

A belső súrlódási együttható függ a folyadék anyagi minőségétől. Pl. az éter viszkozitása a vízének kb. a negyede, a ricinusolajé a vízének kb. 10-szerese, az emberi vére 38°C-on ötszöröse a vízének. Sok szilárd testnek tekintett anyagnál is fellép a belső súrlódás. Pl. egy pecsétviaszrud eltörésénél éles szélek keletkeznek. Ha viszont a rudat végeihez közel, vízszintes helyzetben két pontban alátámasztjuk, hónapok múltán a végek függőleges helyzetbe hajolnak le. A pecsétviasz belső súrlódási együtthatója kb. 10^{10} Pas. A gázok viszkozitása sokkal kisebb, pl. a hidrogéné a vízénél ezerszer kisebb.

Ha összehasonlítjuk például a víz és egy szirupszerű folyadék által kifejtett közegellenállást, amit a bennük állandó sebességgel mozgó testre kifejtenek, a szirupban fellépő ellenállás sokkal nagyobb lesz. Általában egy közeg által egy testre kifejtett ellenállás két részből áll, amelyek közül az egyik rész függ a viszkozitástól, míg a másik rész független tőle. A négyzetes közegellenállási törvény – mely szerint a közegellenállás a közeghez viszonyított sebesség négyzetével arányos – nem függ a viszkozitástól. A víz és a szirup esetében a négyzetes közegellenállási tag kb. egyenlő, de a szirup nagyobb viszkozitása miatt a viszkozitástól függő ellenállási erő nagyobb.

Tapasztalat szerint az ellenállás annál inkább lesz egyszerűen a sebességgel arányos, minél kisebb a sebesség nagysága. Ebben a sebességtartományban, tehát amelyben az ellenállásra a lineáris sebességtörvény érvényes, a megfigyelések szerint az ellenállás a közeg η belső súrlódási együtthatójával arányos, és itt a közeg sűrűsége nem befolyásolja az ellenállás nagyságát. Az olyan mozgásokat, melyek sebességénél a lineáris ellenállástörvény érvényes, lamináris mozgásoknak nevezzük.

Az ilyen csúszó mozgás létrejöttét a következőképpen képzelhetjük. A mozgó testre a közvetlenül mellette lévő folyadékrezecskék rátapadnak, és egy vékony hárttyát alkotnak (határréteg). Ez a hárttya a testtel együtt mozog, és a vele érintkező folyadék-réteget hozza mozgásba, amelynek sebessége nyilván kisebb, a következő vékonyrétege úgyszintén. Ezt a folyadékmozgást nevezzük lamináris mozgásnak. A rétegek között tehát sebességkülönbség van. Hogy a mozgás fennmaradjon, a belső súrlódás

miatt a testre közvetlenül rátapadó folyadék felszínére kell egy erőt kifejteni, amelynek nagyságára fennáll

$$F = \eta q \frac{\Delta v}{\Delta b}. \quad (4)$$

A lamináris mozgásra vonatkozik a *Stokes*-féle ellenállástörvény, mely szerint egy η viszkozitású közegben nagyon kis állandó v sebességgel mozgatott r sugarú gömbre kifejttet közegellenállás nagysága:

$$F = 6\pi\eta r v. \quad (5)$$

Egy közegben eső golyóra csak a gravitációs és a felhajtó erő hat, ezek eredője lesz állandó sebességnél az (5)-ben szereplő F erő, így (5) a következő alakú:

$$\frac{4\pi}{3} r^3 (\rho_g - \rho_f) g = 6\pi\eta r v. \quad (6)$$

Ebből $v = s/t$ behelyettesítés után η -ra kapjuk, hogy

$$\eta = \frac{2r^2 g}{9s} (\rho_g - \rho_f) t, \quad (7)$$

ahol ρ_g , és ρ_f a golyó, illetve a folyadék sűrűségét, s pedig a golyó t idő alatt megtett útját jelentik, amely egy állandó érték.

A valódi folyadékok áramlására vonatkozó nevezetes törvény a *Hagen-Poiseuille* törvény, amely megadja a t idő alatt az l hosszúságú és r sugarú csövön átáramlott η viszkozitású folyadék V térfogatát ($p_1 - p_2$) nyomáskülönbség esetén:

$$V = \frac{\pi}{8} \frac{1}{\eta} \frac{r^4}{l} (p_1 - p_2) t. \quad (8)$$

Ezt a törvényt a *Newton*-féle súrlódási törvényből vezethetjük le oly módon, hogy a cső belsejében felveszünk egy ρ sugarú hengert, melynek két vége között Δp a nyomáskülönbség. Ezt a hengert mozgató F erő $\rho^2 \pi \Delta p$, a súrlódási erő pedig a *Newton*-féle törvényből: $-\eta 2 \rho \pi l \frac{\Delta v}{\Delta \rho}$, így a (4) egyenlet a következő alakú lesz:

$$\rho^2 \pi \Delta p = -\eta 2 \rho \pi l \frac{\Delta v}{\Delta \rho}, \quad (9)$$

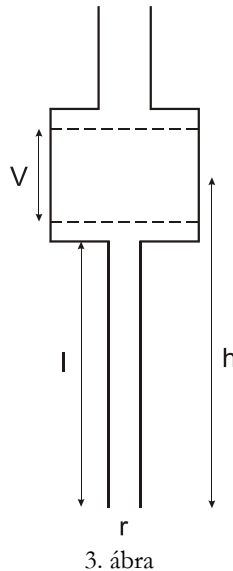
Amelyből integrálással adódik:

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l}(r^2 - \rho^2). \quad (10)$$

Egy $d\rho$ szélességű körgyűrűn az időegység alatt átfolyó dV térfogat

$$dV = v2\pi\rho d\rho, \quad (11)$$

amelyből v behelyettesítése után integrálással adódik a *Hagen-Poiseuille* törvény. Ennek felhasználása ad egy *abszolút* módszert η mérésére. Egy pipettaszerű cső alsó r sugarú és l hosszúságú részén áramoltatjuk át a kiszélesedő rész két jele közötti térfogatban lévő folyadékot. V , r , l , t mérhető. $\Delta p = h\rho g$, ahol h a kifolyási idő feléhez tartozó magasság.



3. ábra

A viszkozitás *relatív* mérésére alkalmas az *Ostwald*-féle kapillár-viszkoziméter, amely szintén a (8) összefüggés alkalmazása. A gyakorlaton használt *Höppler*-féle viszkoziméterrel tulajdonképpen a (7) egyenlet alapján határozzuk meg η értékét, megjegyezve azt, hogy a (6) és ezért a (7) összefüggés is csak abban az esetben érvényes, ha a golyó távol van az edény falától, ami ezen viszkoziméternél nem teljesül. Ezért a (7)-ben a $2r^2 g/9s$ konstans helyett egy K empirikus állandót vezetünk be, így (7) a következő alakú lesz:

$$\eta = K(\rho_g - \rho_f)t. \quad (12)$$

Ismerve η , ρ_g , ρ_f és t értékét, K meghatározható. A viszkozimétert gyárilag hitelesítik, azaz megadják K értékét.

A dinamikai viszkozitás mellett használatos mennyiség még a kinematikai viszkozitás, amely a dinamikai viszkozitás és a sűrűség hányadosa:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \quad (13)$$

Ennek egysége: $1 \text{ m}^2/\text{s}$, a CGS egységneve stokes, jele St. A kétféle egység közötti kapcsolat: $1 \text{ m}^2/\text{s} = 10^4 \text{ St}$.

A folyadékok dinamikai viszkozitása a hőmérséklet emelkedésével csökken a következő törvény szerint

$$\eta = ATe^{\frac{U}{kT}}, \quad (14)$$

ahol T a folyadék hőmérséklete, A és U anyagi állandók (U az egy molekulára jutó aktivációs energia), k pedig a *Boltzmann*-állandó.

Frenkel szerint a diffúzió a termikus ingadozások következtében keletkezett lyukak vándorlása által következik be. A lyukak közötti átmenetek száma kapcsolatba hozható a folyadék viszkózitásával és diffúziós állandójával. Egy lyuk sugarát a következő összefüggés adja meg:

$$r_0 = \sqrt{\frac{U}{4\pi\alpha}}, \quad (15)$$

itt α a folyadék felületi feszültsége.

A következő táblázat megadja a víz sűrűségének és felületi feszültségének hőmérsékleti függését.

t (°C)	30	40	50	60	70
ρ (kg/m ³)	995,6	992,2	988,0	983,2	977,2
α (N/m)	0,07104	0,06949	0,06794	0,06639	0,06484

Feladatok:

- 1) Forraljon 15 percig kb. 2 dl desztillált vizet, majd hűtse le szobahőmérsékletűre.
- 2) A *gyakorlatvezető jelenlétében* hozza mérőkész állapotba a viszkozimétert.
- 3) Határozza meg a kifőzött víz dinamikus viszkózitását kb. 30, 40, 50, 60, 70°C hőmérsékleteken. A golyó mozgásidejét akkor kezdje mérni, amikor a belső hőmérő higanyszála már megállapodott. A víz sűrűségadatait vegye a mellékelt táblázatból. Ábrázolja az $\eta = \eta(T)$ függvényt.
- 4) Igazolja a (14) egyenlet helyességét az $\eta = \eta(T)$ függvény linearizálásával. Határozza meg az egy molekulára jutó U aktivációs energia értékét.
- 5) A táblázat adatai alapján határozza meg a (15) összefüggés alapján a lyukak sugarát a hőmérséklet függvényében.

Ajánlott irodalom:

📖 Budó Á. - Szalay L.: Fizikai laboratóriumi gyakorlatok, 28 - 35. o.

📖 Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., 75.§ - 85.§

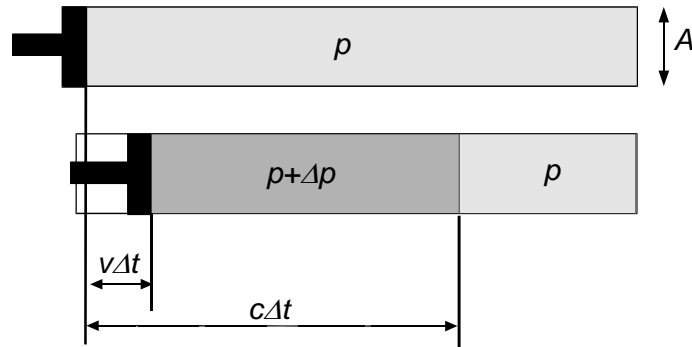
9. Hang terjedési sebességének mérése Kundt-féle csővel

Célkitűzés:

- A hangsebesség mérése különböző gázokban.
- A hangsebesség és a gázok hőtani paramétereinek között fennálló kapcsolat tanulmányozása, a c_p/c_v érték meghatározása.
- Állóhullámok vizsgálata.

Elméleti összefoglaló:

Ha egy testet levegőben mozgatunk, abban zavar keletkezik. Ha igen lassan mozgatjuk, a levegő csak áramlik mellette, míg a test gyors mozgásánál, amely ilyen áramlásra nem hagy időt, nyomásváltozást idéz elő. Ekkor a v sebességgel mozgó test összenyomja a p nyomású levegőnek azt a részét, amellyel érintkezik, és az összenyomott levegő nagyobb $p + \Delta p$ nyomást fejt ki a környező levegőre. Ez a nyomásnövekedés a gázban tovaterjed, vagyis benne hullám keletkezik. Folyamatos hanghullám létrejöttékor a hullámot keltő rezgő test, így a gáz részecskéi is rezegnek, ami a gáz sűrűségét és nyomását is periodikusan változtatja. A kinetikus elmélet szerint egy gázban, ha az egyik helyen nagyobb a sűrűség, mint a vele szomszédos másik helyen, akkor annyi molekula megy át a nagyobb sűrűségű helyről a kisebb sűrűségűre, amennyi a kiegyenlítéshez szükséges. A hanghullám keletkezésénél a nagyobb sűrűségű, nagyobb nyomású tartományból kiáramló molekulák *impulzust* adnak át a szomszédos, kisebb nyomású tartomány molekuláinak. Az így keltett hullámok longitudinális hullámok. Transzverzális hullámok gázokban a számottevő nyíróerők hiánya miatt nem keletkeznek.



1. ábra

Tekintsük az 1. ábra szerinti esetet, amikor egy ρ sűrűségű, állandó A keresztmetszetű gázoszlopban a nyomáshullámot egy állandó v sebességű dugattyú benyomásával hozzuk létre. A c sebességű Δp nyomásnövekedést okozó hullám rövid Δt idő alatt $l = c\Delta t$ utat tesz meg. A Δt idő alatt a gázoszlop eleje $\Delta l = v\Delta t$ távolsággal elmozdul, míg az l távolságra eső vége még nem, azaz a gázoszlop összenyomódik. A nyomásnövekedés a relatív térfogatcsökkenéssel arányos:

$$\Delta p = -K \frac{\Delta V}{V} = -K \frac{\Delta l}{l}, \quad (1)$$

ahol K a kompressziómodulus. Az A keresztmetszetű dugattyú által a közegre kifejtett erő

$$F = A\Delta p = AK \left(-\frac{\Delta V}{V} \right) = AK \frac{v}{c}. \quad (2)$$

Az impulzustétel szerint az m tömegű gáz impulzusváltozása $F\Delta t = mv = \rho A c \Delta t v$, amelyet felhasználva kapjuk az

$$F = AK \frac{v}{c} = \rho A c v \quad (3)$$

összefüggést, amelyből a longitudinális hullám sebessége már kifejezhető:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}. \quad (4)$$

Ahol a gáz összenyomódik, ott a hőmérséklet nő, a tágulás helyén pedig csökken. A nagyobb nyomású tartományból a kisebb nyomásúba átáramló hő mindaddig elha-

nyagolható, amíg a nagy frekvenciával ismétlődő kompresszió-expanzió során nincs idő a szomszédos levegőtartományok közötti hőmérséklet kiegyenlítődére, tehát a hanghullámban a nyomás adiabatikusan változik. Ekkor a relatív nyomásváltozás nagysága – az izoterm folyamatokkal szemben – nem egyezik meg a relatív térfogatváltozás nagyságával, hanem annak κ -szorososa, ahol κ egy 1-nél nagyobb szám, mégpedig a termodinamika első főtételeiből adódóan a gázok kétfajta fajhőjének hányadosa $\kappa = c_p/c_v$.

$$\frac{\Delta p}{p} = -\kappa \frac{\Delta V}{V}. \quad (5)$$

Az (1) és (5) egyenleteket összehasonlítva látszik, hogy κ a K kompressziómodulus és a p nyomás hányadosa, azaz a $\kappa = K/p$. Ezt felhasználva kapjuk a *Laplace*-féle összefüggést, mely szerint a hang sebessége ideális gázokban:

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} \quad (6)$$

A (6) egyenletbe a ρ sűrűség helyett az m/V összefüggést írva, valamint felhasználva az ideális gázokra vonatkozó $pV = NkT$ állapotegyenletet, ahol k a *Boltzmann* állandó, T az abszolút hőmérséklet és N a molekulák száma, a hangsebességre

$$c = \sqrt{\kappa \frac{kT}{m_0}} \quad (7)$$

adódik, ahol m_0 egyetlen molekula tömegét jelenti. Ebből nyilvánvaló, hogy a hangsebesség a gáz hőmérsékletétől és az anyagi minőségétől függ, a nyomásától és a sűrűségétől nem.

Az *ekvipartíció tétele* szerint a gáz egy-egy molekulájának bármelyik translációs- és bármelyik rotációs szabadsági foka egyenként átlagban $kT/2$ -vel járul hozzá a gáz energiájához. Egy gáztérben N számú, egymástól függetlennek tekinthető, egyenként f szabadsági fokkal rendelkező molekulából álló gáz U belső energiája:

$$U = \frac{f}{2} N kT. \quad (8)$$

Az *állandó térfogat* melletti C_v hőkapacitás a gáz hőmérsékletének 1 Kelvin fokkal való megváltoztatásához szükséges hőmennyiséget adja meg. Az első főtétel értelmében, mivel állandó térfogaton nincs munkavégzés

$$\Delta U = Q = C_v \Delta T = \frac{f}{2} N k \Delta T \quad (9)$$

egyenlet írható fel. (9)-ből következik, hogy

$$C_v = \frac{f}{2} N k. \quad (10)$$

A termodinamikából ismeretes továbbá, hogy a gázok *állandó nyomásra* vonatkozó hőkapacitása

$$C_p = \frac{f+2}{2} N k \quad (11)$$

értékű. Mivel $C_v = mc_v$ és $C_p = mc_p$, a (10) és (11) egyenletekből adódik κ értéke:

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{C_p}{C_v} = \frac{f+2}{f}. \quad (12)$$

Eszerint, ha *egyatomos gázok* (pl. He, Ne, Ar) atomjait tömegpontnak tekintjük, akkor azok csak 3 transzlációs szabadsági fokkal rendelkeznek: $f=3$, tehát $\kappa = 5/3 \approx 1,66$. *Kéttomos molekulákból álló gázoknál* (pl. H₂, N₂, O₂) a legegyszerűbb modell szerint a molekula két, egymással mereven összekötött tömegpontból áll. Ekkor a 3 transzlációhoz 2 rotációs szabadsági fok járul. Azért csak kettő, mert a két tömegpontot összekötő egyenesre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték közel zérus, tehát e tengely körüli forgáshoz tartozó forgási energia is közel zérus. Így a szabadsági fokok száma 5, $\kappa = 7/5 = 1,4$. *Többatomos, térben kiterjedt alakú molekulákból álló gázoknál*, ha a molekulát merevnek képzeljük, a szabadsági fokok száma $f=6$ lesz (3 transzlációs és 3 rotációs szabadsági fok), így ideális gázok esetén $\kappa = 8/6 \approx 1,33$ értékű lesz. (Lineáris többatomos molekuláknál a szabadsági fokok száma a kéttomos gázokhoz hasonlóan szintén 5.)

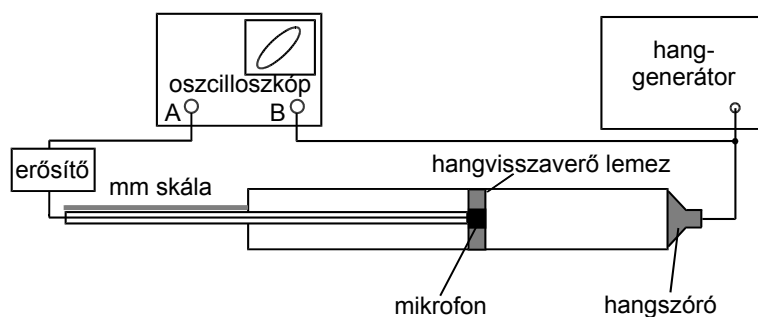
Összefoglalva: ismert sűrűségű gázban a hangsebesség megméréssel meghatározható a K kompressziómodulus, illetve ha a gáz nyomását is ismerjük, akkor a $\kappa = c_p/c_v$ fajhőhányados értéke is. Ha viszont κ -t ismerjük, abból a gáz termikus jellemzőire,

illetve molekuláinak szerkezetére következtethetünk. Meg kell jegyeznünk, hogy bár ezek a megfontolások csak ideális gázokra vonatkoznak, sok esetben a valódi gázok termikus jellemzőit is jó közelítéssel megadják.

Hang sebességének mérése Kundt-csővel:

A κ meghatározása céljából (6) szerint meg kell állapítani a vizsgált gázban adott hőmérsékleten a hang c sebességét, a gáz p nyomását és a ρ sűrűségét. Méréseinknél a levegő sűrűségét táblázatból vesszük, nyomását barométerről olvassuk le. Egnemű gázok esetén megmérve a hőmérsékletet a κ -t (7) alapján számíthatjuk ki.

A hang sebességét többfajta módon meg lehet állapítani, a legegyszerűbben úgy,



2. ábra

hogy mérjük egy adott távolságon a zavar terjedési idejét. Egy másik, a gyakorlaton is alkalmazott módszernél azt használjuk ki, hogy a hanghullám fáziskülönbsége π egész számú többszöröse a hangforrás és az érzékelő között akkor, ha a távolság köztük a λ hullámhossz felének egész számú többszöröse. A mérőberendezés a 2. ábrán látható. Ez egy kb. 1 m hosszú és 7 cm átmérőjű üvegcső, melynek egyik végén egy hangszóró van. A hangszóró membránját egy hanggenerátorral hangfrekvenciás rezgésbe hozzuk. A csőbe egy változtatható helyzetű lemezt helyezünk el, amelybe egy mikrofon van beépítve. Ha a mikrofon jelét az oszcilloszkóp függőleges, a hangszóróra adott változó feszültséget a vízszintes bemenetre kapcsoljuk, akkor $n\pi$ fáziskülönbség esetén, ahol n pozitív egész szám, a kialakuló *Lissajous*-görbe egyenes lesz. Ha egy ilyen hely-

zetből a mikrofont $\lambda/2$ -vel eltoljuk, azaz a mikrofon és a hangszóró jele között a fáziskülönbséget π -vel változtatjuk, az újonnan kapott egyenes meredeksége előjelet vált. A hullámhossz meghatározásához e távolságot, vagy pedig többszörösét mérjük le.

A gyakorlaton a hangsebességet meghatározzuk állóhullámok hullámhosszának mérésével is. Az állóhullámok előállítására alkalmazott eljárás lényegében megegyezik a *Kundt*-féle módszerrel, csak a rezgések keltésében és a kialakult állóhullámok detektálásában van eltérés. A 2. ábrán lévő csőben a mikrofont tartó lemez visszaveri a hanghullám egy részét. A lemezt mozgatva annak bizonyos helyzeteinél rezonancia lép fel. Ha a hangszóróból kiinduló és a mikrofon lemezéről visszaverődő hanghullámok fáziskülönbsége 2π egész számú többszöröse, akkor az interferencia révén a hangintenzitás erősödni fog és a csőben állóhullámok alakulnak ki. A rezonancia, illetve állóhullám akkor jön létre, ha a gázoszlop saját frekvenciája megegyezik a hangforrás ν frekvenciájával, ami

$$\nu = \frac{nc}{2L} \quad (13)$$

nagyságú, ahol L a zárt gázoszlop hossza, n pedig pozitív egész szám. A rezonanciában lévő gázoszlop részecskéinek rezgési amplitúdója sokkal nagyobb lehet, mint a gerjesztő hangszóró membránjának rezgési amplitúdója. Ha ez a frekvencia elég nagy és a cső elég hosszú, akkor az állóhullámoknak több duzzadóhelye (illetve csomópontja) lesz, amelyek $\lambda/2$ távolságra vannak egymástól, ahol λ a hang hullámhosszát jelöli. E távolságok megméréseivel a frekvencia ismeretében a hang sebességét a $c = \lambda\nu$ összefüggés alapján kapjuk meg. A duzzadó-helyek meghatározásakor a csőben keletkező állóhullámok által a mikrofonban keltett váltakozó feszültség amplitúdóját mérjük, ennek nagysága a duzzadó-helyeknél maximális. Ezt a mikrofonban keletkezett jelet egy előerősítőn keresztül rákapcsoljuk egy oszcilloszkóp függőleges bemenetére, és a mikrofon elmozdítása során az oszcilloszkóp ernyőjén fellépő jelmaximumok segítségével állapítjuk meg a duzzadó helyek közötti távolságot, azaz $\lambda/2$ nagyságát.

A mikrofon a csőben egy mm skálával ellátott rúd segítségével mozdítható el. Pontosabb mérést végezhetünk, ha a hullámhosszat nemcsak kettő, hanem több rezonancia-hely távolságának a különbségéből határozzuk meg. Egyszerre n darab $\lambda/2$

távolság mérésével a leolvasási hibából származó pontatlanság mértéke n -ed részére csökkenthető.

Feladatok:

- 1) Határozza meg amplitúdó mérésével a hang hullámhosszát levegőben. Változtassa a frekvenciát 1000 Hz-től 2000 Hz-ig 100 Hz-enként. Az $n \cdot \lambda/2$ távolság mérését minden frekvencia esetén 3-szor végezze el, a számításokhoz a távolságok átlagát használja.
- 2) Határozza meg az egyes frekvenciákhoz tartozó hangsebesség értékeket, és számítsa ki ezek c átlagát.
- 3) Ábrázolja a λ -t az $1/\nu$ függvényében, és határozza meg grafikusán is c -t.
- 4) Mérje meg a légnyomást és a hőmérsékletet. A levegő sűrűségét táblázatból keresse ki. Számítsa ki a $\kappa_{\text{levegő}}$ -t, felhasználva c értékét.
- 5) Az előbbi méréssorozatot végezze el újra úgy, hogy a *Kundt*-féle csőben levegő helyett argon van. A mérésnél ügyeljen arra, hogy a mikrofon túl gyors mozgata-sakor az argont tartalmazó térbe a mikrofon mellett levegő kerülhet. A hullám-hosszat *Lissajous*-görbék segítségével határozza meg a mikrofon $n \cdot \lambda/2$ távolsággal való elmozdításával. Határozza meg az egyes frekvenciákhoz tartozó hangsebesség értékeket, és számítsa ki ezek átlagát.
- 6) Ábrázolja a λ -t az $1/\nu$ függvényében és határozza meg grafikusán is c -t. A nyomást és a hőmérsékletet argon esetében is a külső légnyomással, illetve hőmérsék-lettel megegyezőnek vesszük. Számítsa ki a κ_{argon} -t, $M_{\text{argon}} = 39,9$ g/mol.
- 7) Magyarázza meg a $\kappa_{\text{levegő}}$ és κ_{argon} közti különbséget.

Ajánlott irodalom:

📖 Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., 102.§, 103.§

📖 Dede M. - Demény A.: Kísérleti fizika, 2. kötet, 3.1.3, 3.4.4.

10. Kalorimetriai mérések

Célkitűzés:

- Termodinamikai mennyiségek meghatározása.
- Termodinamikai mérőeszközök hitelesítése.

Elméleti összefoglaló:

Az alapvető hőjelenségek értelmezéséhez a következő fizikai mennyiségekre van szükség. Az egyik a *termodinamikai hőmérséklet* vagy hőmérséklet, ami az adott test hőállapotára jellemző mennyiség. Ezt mérhetjük az abszolút hőmérsékleti skálán (T ; mértékegysége 1 K), illetve a köznapi életben megszokottabb Celsius-féle hőmérsékleti skálán is (t ; mértékegysége 1 °C). A két skála között csak egy additív konstans különbség van ($0\text{ °C} = 273,15\text{ K}$). A másik fizikai mennyiség a *hőmennyiség* (Q ; mértékegysége 1 J), ami a test hőmérsékletének megváltoztatásához szükséges *rendezetlen úton* felvett, illetve leadott energia.

Két, egymás mellé helyezett különböző hőmérsékletű test között hőmérséklet-ki-egyenlítődés indul meg. A végállapot hőmérséklete függ a két test hőkapacitásától. Egy test *hőkapacitásának* (C) mérőszáma egyenlő annak a hőmennyiségnek a mérőszáma-val, amely ahhoz szükséges, hogy a test hőmérséklete 1 K-nel változzon meg; mértékegysége 1 J/K. Ha eltekintünk a környezettel való kölcsönhatástól, akkor a két test közötti hőmérséklet-kiegyenlítődési folyamatra a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$Q_1 = -Q_2, \quad (1)$$

ahol Q_1 az egyik test által felvett hőmennyiség, Q_2 pedig a másik test által leadott hőmennyiség. Felhasználva a hőkapacitás fogalmát Q_1 és Q_2 az alábbi formában írható fel:

$$Q_1 = C_1 \cdot (T_k - T_1) = C_1 \cdot \Delta T_1, \quad (2)$$

$$Q_2 = C_2 \cdot (T_k - T_2) = C_2 \cdot \Delta T_2, \quad (3)$$

ahol C_1 és C_2 a két test hőkapacitása, T_1 és T_2 a megfelelő kezdeti hőmérsékletek, T_k pedig a végállapot közös hőmérséklete. Feltételeztük, hogy $T_1 < T_2$.

Megadható egy olyan mennyiség, a *fajhő* (c), mely csak az anyagi minőségre jellemző. A fajhő mérőszáma egyenlő annak a hőmennyiségnek a mérőszámával, amely szükséges ahhoz, hogy 1 kg tömegű, adott minőségű anyag hőmérséklete 1 K-nel megváltozzon, mértékegysége 1 J/(kg·K). Tehát a hőkapacitás és a fajhő között a

$$C = c \cdot m \quad (4)$$

összefüggés áll fenn.

Emiatt (1) átírható a következő alakra:

$$c_1 \cdot m_1 \cdot (T_k - T_1) = c_2 \cdot m_2 \cdot (T_2 - T_k). \quad (5)$$

Az (5) egyenlet csak hőmérséklet-különbségeket tartalmaz, azaz az abszolút hőmérsékleti skála helyett használhatjuk a *Celsius*-féle hőmérsékleti skálát. Így:

$$c_1 \cdot m_1 \cdot (t_k - t_1) = c_2 \cdot m_2 \cdot (t_2 - t_k), \quad (6)$$

ahol t_1 , t_2 és t_k a *Celsius*-skálán mért megfelelő hőmérsékletek.

Összetett testek esetén a hőkapacitás az egyes részek hőkapacitásának összege:

$$C = \sum_i c_i \cdot m_i. \quad (7)$$

A hőmennyiségek mérésére szolgáló eszközök a *kaloriméterek*. Ezek közül leggyakrabban a *keverési kalorimétert*, másképpen *vízkalorimétert* használják. Ez egy vékony falú edény, melybe egy hőmérő és egy kavarázó nyúlik be. Az edény folyadékot – általában vizet – tartalmaz. A környezettől való minél tökéletesebb hőszigetelés céljából a kaloriméter rendszerint egy kettős, hőszigetelt falú edényben (termoszban) van, és felülről is lezárják egy hőszigetelő lappal. A hőfelvétel vagy hőleadás szempontjából a kaloriméter és tartozékai bizonyos hőkapacitást képviselnek. Ehelyett sokszor a szemléletesebb jelentésű *vízértéket* használják.

Egy adott rendszer *vízértékén* azt a μ tömeget értjük, melyre igaz, hogy μ tömegű víz hőkapacitása egyenlő az adott rendszer hőkapacitásával.

Mérés menete:

A gyakorlaton megvalósítandó mérés során két hőmérőt használunk. Az egyik hőmérő a kaloriméter hőmérsékletét fogja mérni, a másik pedig a kaloriméterbe bekerülő anyagok (víz, szilárd testek) hőmérsékletét. A kaloriméterben lévő hőmérőt hitelesnek elfogadva, a másikat hitelesíteni kell. Ez azt jelenti, hogy lassan változó hőmérsékletű vízfürdőben néhány hőmérsékleten, a két hőmérőt egymás mellett tartva le kell olvasni az értékeket. Ezekből hitelesítési grafikont kell készíteni.

A kaloriméter vízértékének meghatározásához felmelegített vizet öntünk a kaloriméterbe, a fajhők méréséhez pedig a felmelegített testeket helyezzük oda.

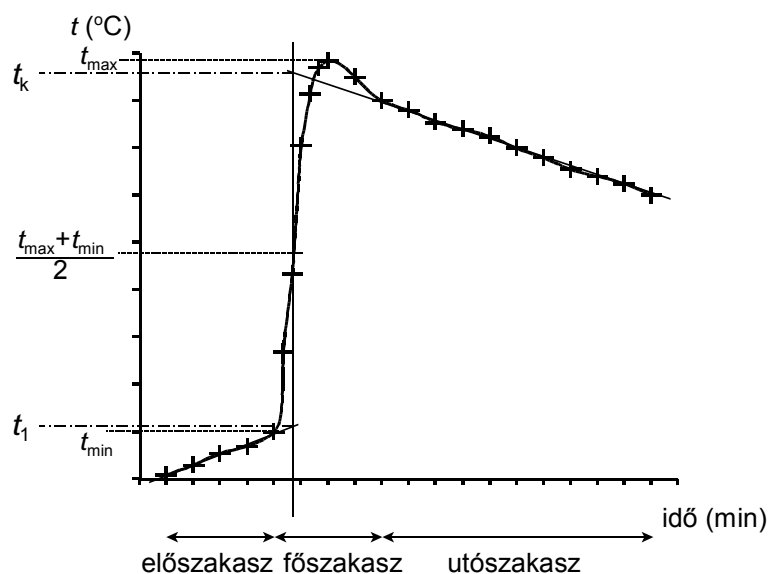
A kaloriméter soha nincs tökéletesen elszigetelve a környezetétől, ezért a környezettel mindig van egy viszonylag lassú hőcsere. Emiatt minden mérés időbeli folyamat mérése lesz: meghatározott időközönként mérni kell a kaloriméter hőmérsékletét, majd ezeket ábrázolni kell egy hőmérséklet-idő grafikonon (1. ábra).

A folyamatot a következőképpen kell végrehajtani.

Az üres kaloriméterbe adott mennyiségű csapvizet kell beleönteni, majd a hőmérsékletét folyamatosan mérni kell. Ez az *előszakasz*. Közben vízfürdőben fel kell melegíteni a behelyezendő, ismert tömegű vizet/testet. Amikor ez az előírt hőmérsékletet elérte, a vizet/testet a kaloriméterbe kell helyezni. Az előszakasz utolsó mérési pontja a behelyezést közvetlenül megelőző időpont legyen (akkor is, ha így nem egyenközű lesz a mérés)! A *főszakasz* az a gyors lefolyású folyamat, ami a víz/test behelyezésével kezdődik meg. A kaloriméterben ekkor történik meg a teljes hőkiegyenlítődé. Az *utószakasz* a környezettel való hőcsere mutatja.

A folyamat termodinamikai leírása nagyon bonyolult, e jegyzet nem részletezi. Az elméleti számítások szerint a grafikont a következőképpen kell helyesen kiértékelni: az előszakaszban legutoljára mért hőmérséklet (t_{\min}), illetve a főszakaszban mért legnagyobb hőmérséklet (t_{\max}) számtani közepénél húzott vízszintes vonal és a mérési pontokra illesztett görbe metszéspontjába egy függőleges egyenest húzunk (lásd 1. ábra). Ezek után az előszakaszra illesztett egyenes és a függőleges egyenes metszéspontja megadja a kaloriméter kezdeti t_1 hőmérsékletét. Az utószakaszra illesztett egyenes és az

előbbi függőleges egyenes metszéspontja pedig megadja a végállapot közös t_k hőmérsékletét. A behelyezendő test/víz hőmérsékletét (t_2) a másik, hitelesített hőmérővel mérjük. A szilárd testek esetében valójában csak a vízfürdő hőmérsékletét mérjük, de ez a gyakorlatban megegyezik a testek hőmérsékletével.



1. ábra

A fémek jó hővezetők, a műanyagok pedig rosszak. Emiatt ha egy műanyag testet (a vízfürdőben) túl gyorsan melegítünk, akkor a test nem egyenletesen melegszik fel, azaz az átlaghőmérséklete nem egyezik meg a vízfürdő hőmérsékletével. Ez hibát okozna t_2 -ben, s emiatt a kiszámított fajhőben is. Ezt elkerülendő, a testeket lassan kell melegíteni!

A mérések pontosságát befolyásolja az az idő is, amit közvetlenül betöltés/behelyezés előtt a levegőben tölt a víz/test, s emiatt kissé lehűl. Ezt az időt minél kisebbre kell választani.

Szilárd test fajhőjének méréséhez a kaloriméterbe m_1 tömegű, szobahőmérsékletű vizet töltünk, és elkezdjük mérni a hőmérsékletét (előszakasz). Az előzőleg mérlegem lemért m_2 tömegű testet vízfürdőben melegítjük az előírt hőmérsékletre, majd a kalo-

riméterbe helyezzük, és felvesszük a hőmérséklet-idő grafikont. Erről meghatározzuk a megfelelő hőmérsékleteket (t_1 , t_k). A kaloriméter hőkapacitását most μ tömegű vízzel vesszük egyenértékűnek, azaz (6) a következőképpen módosul:

$$c_v \cdot (m_1 + \mu) \cdot (t_k - t_1) = c \cdot m_2 \cdot (t_2 - t_k), \quad (8)$$

ahol c a test keresett fajhője, c_v pedig a víz fajhője. (8)-ból c egyszerűen kiszámítható.

A kaloriméter vízértékének meghatározásához ismert tömegű szobahőmérsékletű vizet (m_1) töltünk a kaloriméterbe, és elkezdjük mérni a hőmérsékletét (előszakasz). Szintén ismert tömegű vizet (m_2) felmelegítünk a feladatlapon leírt módon. A meleg vizet beletöltjük a kaloriméterbe, és felvesszük a hőmérséklet-idő grafikont. Meghatározzuk a t_1 és t_k hőmérsékleteket, és (8) alapján felírhatjuk a következő egyenletet:

$$c_v \cdot (m_1 + \mu) \cdot (t_k - t_1) = c_v \cdot m_2 \cdot (t_2 - t_k). \quad (9)$$

A kaloriméter vízértéke (9) alapján:

$$\mu = m_2 \cdot \frac{t_2 - t_k}{t_k - t_1} - m_1. \quad (10)$$

Feladatok:

- 1) Hitelesítse a külső hőmérőt a kaloriméter hőmérőjével.
- 2) Számítsa ki annak a kaloriméternek a vízértékét, amely 5,1 g acélt (digitális hőmérő), 22,1 g műanyagot ($c = 1610 \text{ J/kg } ^\circ\text{C}$) és 144 g vöröszet tartalmaz.
- 3) Határozza meg a műanyag és a vas próbatest fajhőjét. A kaloriméterbe 150 g csapvizet töltsön. A próbatest hőmérséklete a kaloriméterbe helyezés előtt kb. $70 \text{ } ^\circ\text{C}$ legyen (előszakasz 3 perc, főszakasz 4 perc, utószakasz 10 perc). Az előszakaszban percenként, a főszakaszban 20 másodpercenként, az utószakaszban újra percenként kell leolvasni a hőmérsékletet. Ne felejtse el két leolvasás között a kalorimétert megkeverni. Használja a számított vízértéket.
- 4) Határozza meg a kaloriméter vízértékét. A mérést háromszor végezze el. A kaloriméter hőmérsékletváltozása $10\text{-}15 \text{ } ^\circ\text{C}$ legyen (előszakasz 3 perc, főszakasz 2 perc, utószakasz 10 perc). A kaloriméterbe 150 g vizet töltsön, és hozzá 100 g vizet melegítsen.

Megjegyzések:

A vizet, illetve a próbatesteket vízfürdőben kell melegíteni! Forró testeket (főzőpohár, próbatestek) TILOS az asztallapra tenni, mert megégetnék azt! Ezért ezeket kihűlésig a mellékelt hőszigetelt alátétre kell helyezni! Az elektromos főzőlap környezetében tartsa be a megfelelő biztonsági rendszabályokat!

Ajánlott irodalom:

 Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., 111.§, 116.§, 117.§

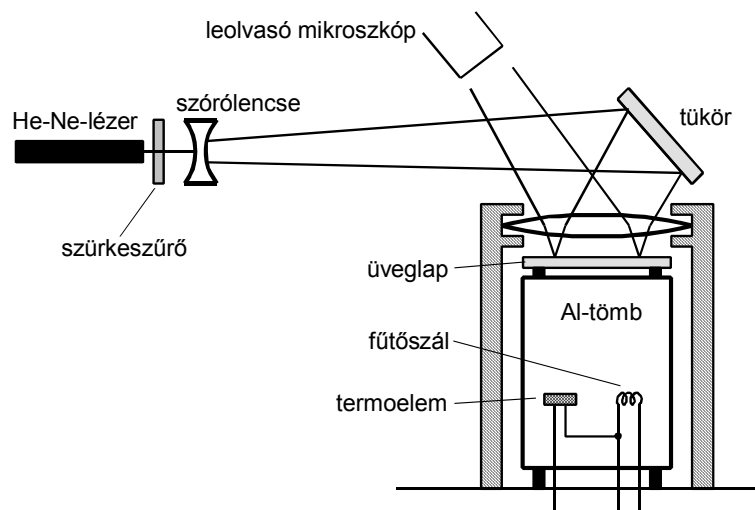
11. Hőtágulási együttható mérése Newton-féle gyűrűk segítségével

Célkitűzés:

- Nagy pontosságú hosszúságmérés megvalósítása interferenciás módszerrel.
- Lézer használata segédeszközként.

Elméleti összefoglaló és a gyakorlat leírása:

Egy alumínium hengerre rögzített, alsó felén mattított üveglap és egy kétszer domború lencse segítségével *Newton*-gyűrűket (lásd az irodalmat) állíthatunk elő (lásd 1. ábra). A lencse a hengertől függetlenül van rögzítve.



1. ábra

A tömböt melegítve, változni fog az üveglap és a lencse közötti távolság. Ennek hatására a gyűrűk elmozdulnak. Figyelembe véve az elrendezés geometriáját, az interferencia-kép egy renddel történő változása (világosból újra világos lesz, vagy sötétből

újra sötét) az üveglap és a lencse közötti távolság $\lambda/2$ -nyi, azaz az optikai úthosszkülönbség λ -nyi megváltozásának felel meg.

Ennek alapján az alumínium lineáris hőtágulási együtthatója, figyelembe véve a

$$\Delta l = l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T \quad (1)$$

összefüggést, a következő:

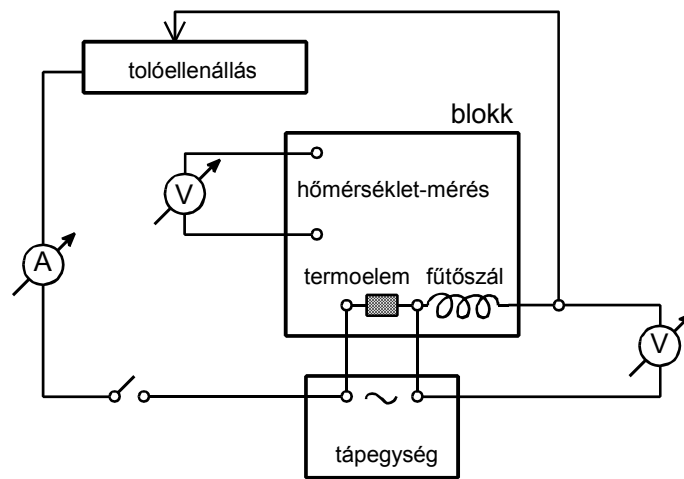
$$\alpha = \frac{\Delta l}{l_0 \cdot \Delta T} = \frac{N \cdot \lambda}{2 \cdot l_0 \cdot \Delta T}, \quad (2)$$

ahol N a rendek változásának száma, λ a fény hullámhossza, l_0 az alumínium henger eredeti magassága, T a hőmérséklet.

Feladatok:

- 1) Állítsa össze a mérési elrendezést az 1. ábra alapján. A szűrkeszűrő a lézerre van szerelve, azt onnan elmozdítani **TILOS! TILOS a lézer fényét szűrő nélkül használni!**

Először szórólencse nélkül állítsa be a fényutat, majd helyezze be a szórólencsét is. Az alumínium henger, a rá rögzített üveglap, a lencse, a fűtőszál és az elektromos hőmérő a lezárt blokkba van beépítve. Az elektromos kapcsolás összeállításához használja a 2. ábrát.



2. ábra

A hőmérő tápfeszültségét és a fűtőáramot a 12 V-os váltakozó áramú tápegység szolgáltatja. A hőmérő és a fűtőszál földpontja közös; ezt a tápegység jobboldali csatlakozójához (jelölt földpont) kell kapcsolni. A baloldali csatlakozóhoz kell kapcsolni a hőmérő másik vezetékét és a fűtőáram vezetékét egy ampermérőn, a kiadott toléllenálláson és a kapcsolón keresztül. Az ampermérőt a 20 A, AC méréshatáron kell használni! A hőmérsékletet a blokkhoz csatlakoztatott feszültségmérőn olvashatjuk le: a 2 V, DC méréshatáron a $10 \text{ mV} = 1 \text{ }^\circ\text{C}$ összefüggés alapján. 0 V megfelel $0 \text{ }^\circ\text{C}$ -nak. A fűtőszálon eső feszültséget a harmadik műszerrel mérje.

- 2) Figyelje meg a kapott képet a leolvasó mikroszkóppal. Melegítse az alumínium tömböt kb. 20 s-ig, közben figyelje meg a változásokat és értelmezze azokat. (Az I_f fűtőáram $3,5 - 4 \text{ A}$ legyen.)
- 3) Melegítse a tömböt, és mérjen meg $\Delta l = 50 \lambda/2$ -nek megfelelő hőmérséklet-változást! A mérést 5-ször végezze el, a fűtőáramot az egyes mérések között 3 A -ról fokozatosan $3,8 \text{ A}$ -ig növelve. Mérje a melegítéshez szükséges időt és a fűtőszálon eső feszültséget. Az egyes mérések után várja meg, amíg a tömb hőmérséklete $25 \text{ }^\circ\text{C}$ alá csökken. A mérésekből adja meg az alumínium lineáris hőtágulási együtthatóját. A pontosabb mérés érdekében legyen kb. $1 \text{ }^\circ\text{C}$ -nyi "nekifutás", mielőtt elindítja a stoppert és elkezdi számolni a gyűrűket.
(Az utolsó mérés után ne kapcsolja ki a fűtőáramot, hanem állítsa azt vissza kb. 2 A -ra, elérendő az 5. feladathoz szükséges stacionárius állapotot.)
- 4) Számolja ki a 3) feladatban végzett mérési eredmények alapján a tömb melegítésére fordított hőt és a betáplált elektromos energiát. Számítsa ki a fűtés hatásfokát.
- 5) Várja meg, míg az alumínium tömbben az $I \approx 2 \text{ A}$ fűtőáram hatására közel stacionárius állapot alakul ki (a hőmérséklet 1 perc alatt maximum $0,1 \text{ }^\circ\text{C}$ -al változik). Mérje meg a tömb hőmérsékletét, az áramot és a fűtőszálon eső feszültséget. Határozza meg a fűtési teljesítményt. A tömb és a környezete közötti hőáramlásra jó közelítéssel a

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -k \cdot q \cdot \Delta T$$

Hőtágulási együttható mérése...


összefüggés érvényes, ahol ΔQ a fal q felületén Δt idő alatt átadott hőmennyiség, k a hőátadási együttható és ΔT a tömb fala és a környezet közötti hőmérsékletkülönbség. Számítsa ki k értékét.

Adatok:

Al-henger: $l_0 = 5,5 \text{ cm}$, $r = 1,8 \text{ cm}$, $m = 0,1218 \text{ kg}$,
 $c_{\text{Al}} = 895 \text{ J}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$.

A lézer hullámhossza: $\lambda = 632,8 \text{ nm}$.

Ajánlott irodalom:

 Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., 112.§, 150.§

 Budó Ágoston: Kísérleti fizika III., 278.§

12. Fénysebesség mérése levegőben, szilárd testben és folyadékokban

Célkitűzés:

- Fénysebesség meghatározása különböző közegekben fényemittáló diódák intenzitásának modulálásával.
- A fázis- és csoportsebesség közötti eltérés demonstrálása.

Elméleti összefoglaló:

A fénysebesség fogalma:

Mint jól ismert, a fény elektromágneses hullám. A legegyszerűbb hullám esetén valamilyen Ψ fizikai mennyiség (fény esetén az elektromos- és mágneses térerősség is) időben és térben egyaránt periodikusan, mégpedig harmonikusan változik. Ha további egyszerűsítésként az x irányban terjedő síkhullámot tekintünk, akkor a Ψ fizikai mennyiség idő- és térfüggése a következő egyenlettel írható le:

$$\Psi(x, t) = a \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \alpha \right]. \quad (1.a)$$

ahol a a hullám amplitúdója (Ψ maximális értéke), T és λ az időbeli és térbeli periódusa, vagyis a rezgésidő és a hullámhossz, α pedig a fázisállandó. A szinuszfüggvény argumentumát fázisnak nevezzük. Az $\omega = 2\pi/T$ körfrekvencia és a $c = \lambda/T$ jelölés bevezetésével a következő alakot kapjuk:

$$\Psi(x, t) = a \cdot \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \alpha \right]. \quad (1.b)$$

Ebből az egyenletből jól látható, hogy a hullám fázisa olyan x , t értékpároknál állandó, amelyekre $x/t = c$. A hullám sebessége tehát $c = \lambda/T = \lambda \nu$, ahol $\nu = 1/T$ a

frekvencia. Ezt a sebességet pontosabban (más sebességektől való megkülönböztetés céljából) fázissebességnek nevezzük.

Vákuumban a fénysebesség értéke: $c_0 = 2,997925 \cdot 10^8$ m/s.

A hullámok terjedési iránya két közeg határán általában megváltozik. Ezt a jelenséget fényhullámok esetén fénytörésnek nevezzük. A fénytörés *Snellius–Descartes*-törvénye szerint az α beesési szög és a β törési szög szinuszaik hányadosa a két közegre jellemző állandó értékkel az n_{21} relatív törésmutatóval egyenlő:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{21}. \quad (2)$$

Csak egy közegre jellemző állandó, az n (abszolút) törésmutató áll a (2) egyenlet jobb oldalán, ha az olyan esetet ír le, amikor a fény vákuumból lép valamilyen közegbe. A hullám/fénytörés *Huygens–Fresnel*-féle értelmezése szerint a relatív törésmutató a két közegbeli fénysebesség hányadosa. Az abszolút törésmutató pedig a vákuumbeli és a közegbeli fénysebesség hányadosa.

A hullámban nemcsak fázis, hanem energia és lendület (impulzus) is terjed. Terjedhet továbbá perdület (impulzusmomentum) és információ is. A hullámokkal való információátvitel legegyszerűbben a hullám amplitúdójának, és így intenzitásának az időbeli változtatásával, vagyis modulálásával lehetséges. A moduláció az ún. csoportsebességgel terjed. Ennek a fázissebességgel való kapcsolatát a *Rayleigh*-féle egyenlet adja meg:

$$c^* = c - \lambda \cdot \frac{dc}{d\lambda}. \quad (3)$$

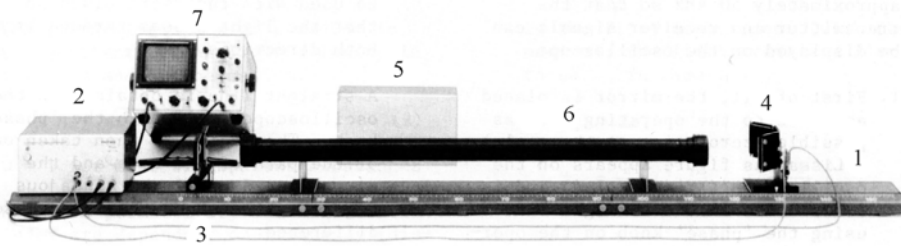
A legtöbb optikai anyag esetén a látható színtartományban a $dc/d\lambda$ diszperzió pozitív, így a csoportsebesség kisebb a fázissebességnél.

Általános működési elv:

A gyakorlaton alkalmazott berendezés (Phywe 11224.93) a fény terjedési sebességének levegőben, illetve átlátszó folyadékban vagy szilárd anyagban való meghatározására használható. A fényforrás egy nagyfrekvenciával (kb. 50 MHz) modulált fényemittáló dióda. A moduláció periódusa szolgáltatja az időskálát. A diódából kibocsá-

tott fény egy bizonyos (változtatható) út megtétele után egy fotodiódába jut, ahol nagyfrekvenciás jelet kelt. Ennek a jelnek a frekvenciája megegyezik a kiinduló jel frekvenciájával, de a két jel fázisa a fény által megtett úttól függően különbözik egymástól. Ez a fáziskülönbség az alapja a fény terjedési sebessége meghatározásának, a fénysebesség ugyanis meghatározható például két olyan fényút beállításával, amelyeknél a detektált jel fázisa 180° -kal változik meg. Ez a moduláció félperiódusidejének megfelelő időkülönbségnek felel meg. Az ehhez szükséges fényútváltozásnak és a terjedési idő változásának a hányadosa megadja a fény terjedési sebességét. A 180° -os fázisváltozás a fényemittáló és detektáló diódák jelével egy oszcilloszkóp ernyőjén előállított *Lissajous*-görbe alapján állítható be.

A mérésre használt berendezés leírása:



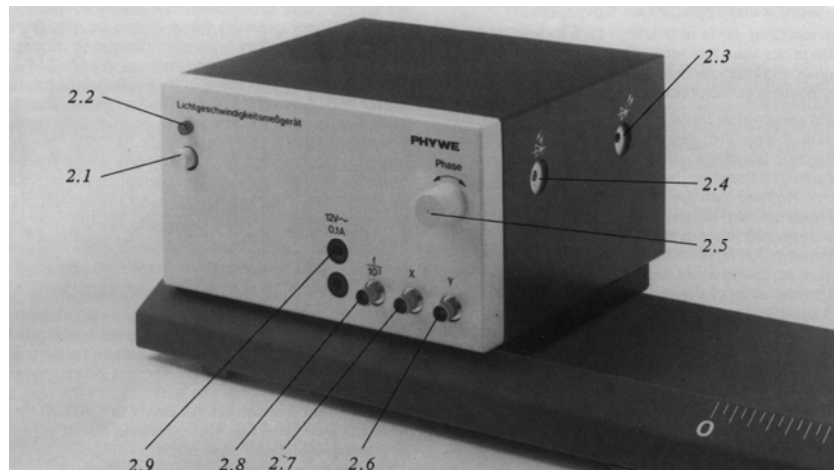
1. ábra

A teljes mérőberendezés az alábbi részekből áll (lásd 1. ábra):

1. alaplapp	2. mérőegység
3. mágnestálon rögzített fókuszáló lencse	4. saroktükrő
5. műanyag téglatest	6. cső alakú mérőcella folyadékok törésmutatójának a méréséhez
7. oszcilloszkóp	

Az **alaplapp (1)** 2 m hosszú festett acéllemez, amelynek egyik oldalán cm beosztás található 0-tól 155 cm-ig 0,5 cm-es osztással.

A **mérőegység (2)** magába foglalja a teljes elektronikát, valamint a fényemittáló és detektáló diódákat. Talpaira erősített mágnescsíkok teszik lehetővé az alaplaphoz történő rögzítést. A mérőegységen a következő működtetési eszközök találhatók (lásd 2. ábra):



2. ábra

- 2.1 hálózati kapcsoló
- 2.2 hálózati ellenőrző lámpa
- 2.3 fényemittáló dióda
- 2.4 fénydetektáló dióda
- 2.5 fázisállító gomb, a detektált jel fázisának megváltoztatására szolgál
- 2.6 Y kimenet; BNC csatlakozó a detektáló dióda jelének az oszcilloszkóp y bemenetére juttatásához
- 2.7 X kimenet; BNC csatlakozó a fényemittáló dióda jelének az oszcilloszkóp x bemenetére juttatásához
- 2.8 $f/10^3$ kimenet; BNC csatlakozó, amelyen olyan négyszögjel jelenik meg, amelynek frekvenciája a fényemittáló dióda modulációs frekvenciájának 1000-ed része.
- 2.9 olvadó biztosíték

A **fókuszáló lencse (3)** egy mágneses talphoz rögzített síkdomború lencse, amely a fényemittáló dióda által kisugárzott és a saroktükörről reflektált fénynek a detektáló dióda aktív felületére történő fókuszálására szolgál.

A **saroktükör (4)** a fényemittáló dióda által kibocsátott fénynek a fókuszáló lencsén keresztül a fotodiódába történő visszajuttatására szolgál. Egy közös tartón elhe-

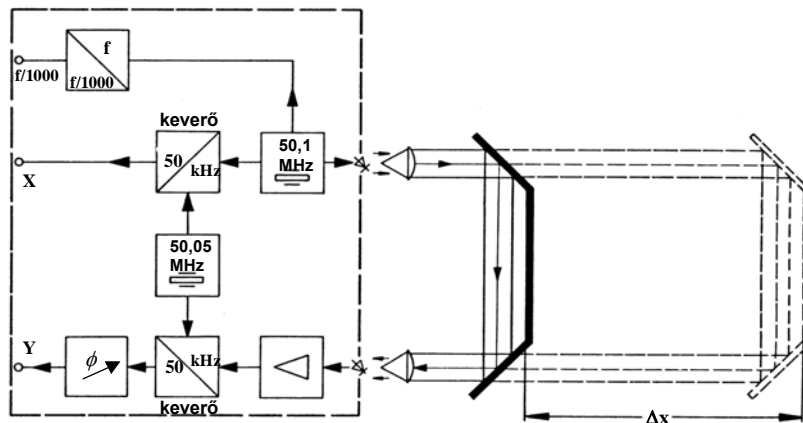
lyezett két siktükörből áll, amelyeket úgy kell beállítani, hogy egymással 90° -os szöget zárjanak be. Mindegyik tükör három csavarral állítható. A saroktükörnek a mérőegységtől való távolításával növelhető a fényút. A saroktükör helyzetének meghatározását segíti az annak fémvázára festett nyíl.

A **műanyag téglatest (5)** kb. 29 cm x 17 cm x 10 cm méretű.

A cső alakú **mérőcella (6)** kb. 1 m hosszú, a két végén lecsavarható ablakokkal ellátott műanyag cső. Az ablakok plexiből készültek, vastagságuk 8 mm.

A mérőegység működése:

A kvarckristállyal stabilizált nagyfrekvenciás oszcillátorral táplált fényemittáló dióda 50,1 MHz frekvenciával modulált fényt bocsát ki. A mérőegység blokkvázlatát a 3. ábra mutatja.



3. ábra

A kibocsátott fény egy ismert hosszúságú út megtétele után a detektáló diódába jut, és abban váltakozó feszültséget hoz létre. E feszültségnek a frekvenciája megegyezik a fényemittáló diódára adott feszültség frekvenciájával. A két feszültség fázisa azonban általában különböző. A mérés során a fényút hosszát olyan Δl értékkel változtatjuk meg, amely a két feszültség fáziskülönbségét 180° -kal változtatja meg. Az ennek megfelelő Δt terjedési idő különbség:

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2\nu}, \quad (4)$$

ahol T a moduláció periódusideje, ν pedig a frekvenciája. A fénysebességet a

$$c = \frac{\Delta l}{\Delta t} \quad (5)$$

hányadosból számolhatjuk ki.

A fázisokat egy oszcilloszkóp segítségével hasonlíthatjuk össze nagy pontossággal. A két váltakozó feszültséget egy X-Y üzemmódban használt oszcilloszkóp X és Y bemenetére kapcsolva, az oszcilloszkóp ernyőjén egy ellipszis jelenik meg. Abban a speciális esetben, amikor a két fázis különbsége 0° vagy 180° , az ellipszis pozitív ill. negatív meredekségű egyenessé válik.

Mivel 50 MHz frekvenciájú jelek fázisának méréséhez 50 MHz átviteli frekvenciájú oszcilloszkópra lenne szükség, és az ilyen oszcilloszkóp nagyon drága, a fénysebesség mérő berendezés 1000-szer kisebb frekvenciájú jeleket biztosít a fázisméréshez a következő módon. Az 50,1 MHz frekvenciájú oszcillátoron kívül a mérőegység tartalmaz egy 50,05 MHz frekvenciájú oszcillátort is. A mérőegység X kimenetén a két oszcillátor frekvenciájának különbségével (50 kHz) rendelkező váltófeszültség jelenik meg. E váltófeszültséget egy ún. keverő (mixer) állítja elő a két oszcillátor jeléből. Egy másik keverő a detektáló dióda által a beérkező fényből előállított 50,1 MHz frekvenciájú váltófeszültségből és az 50,05 MHz frekvenciájú oszcillátor jeléből szintén 50 kHz frekvenciájú jelet állít elő. Ez kerül a mérőegység Y kimenetére egy fázistolást létrehozó eszközön keresztül. A fázistolás mértékét egy potenciométerrel lehet szabályozni. (Ezt állítjuk a 2. ábrán látható 2.5 fázisállító gombbal.) A mérőegység X és Y kimenetén tehát 50 kHz frekvenciájú váltófeszültségek jelennek meg, amelyek fázisa bármely adott fényút esetén tetszőlegesen beállítható.

Mérés menete:

A mérésekhez a mérőegység X és Y kimenetét koaxiális kábellel kell összekötni az oszcilloszkóp 1. illetve 2. csatorna bemenetével. Az oszcilloszkópot X-Y üzemmódban kell használni. A két csatorna érzékenységet úgy kell beállítani, hogy a képernyőn

megjelenő ellipszis teljesen kitöltse a képernyőt. Ehhez az 1. csatorna érzékenységet a saroktükör állásától függően 0,1 - 1 V/skr, a 2. csatorna érzékenységét pedig 50 mV/skr értékre kell állítani. A mérőegység működése kb. 15 perc bemelegedési idő után válik stabillá. A fényemittáló dióda fényét egy papírlappal "követve" kell úgy beállítani, hogy a detektáló dióda jele maximális legyen.

Fénysebesség mérése levegőben:

Helyezze a saroktükört az alaplap 0 cm beosztásához! A fázisállító gomb segítségével tegye egyenlővé a mérőegység Y és X kimeneteinek a fázisát, azaz állítson be egyenest az oszcilloszkóp képernyőjén! Itt meg kell jegyeznünk, hogy a mérőegység X és Y bemenetén megjelenő jel időbeli alakja kissé eltér a szinuszos alaktól. Emiatt a két jel 0° fáziskülönbségének nem egyenes, hanem egy attól alig eltérő döntött és torzított 8-as alak felel meg. Annak érdekében, hogy a 0° ill. 180° fáziskülönbség pontosan beállítható legyen, a képernyőn megjelenő alakot állítsa vízszintesen középre, és azt a helyzetet fogadja el 0° ill. 180° fáziskülönbségnek, amikor a jobbra ill. balra dőlő 8-as alak csomópontja a képernyő közepén van. Távolítsa a saroktükört a mérőegységtől. Ekkor az oszcilloszkóp képernyőjén az egyenes ellipszisbe, majd egy ellenkező állású egyenesbe megy át. A saroktükörnek ebben a helyzetében a saroktükör állító csavarjainak a segítségével maximalizálja a detektáló dióda jelét! Az oszcilloszkóp 1. csatornájának az érzékenységét növelje a szükséges mértékben! Pontosítsa a saroktükör helyzetét! Az alaplapon ekkor leolvasható beosztás adja meg a saroktükör azon Δx elmozdulásának az értékét, amely során az emittált és detektált fény fáziskülönbsége 180°-kal változik meg. A Δx elmozdulás során a fényút hossza $2 \cdot \Delta x$ -el növekedett, tehát az 1. és 2. egyenlet alapján a fénysebesség:

$$c = 2 \cdot \Delta x \cdot 2 \cdot \nu . \quad (6)$$

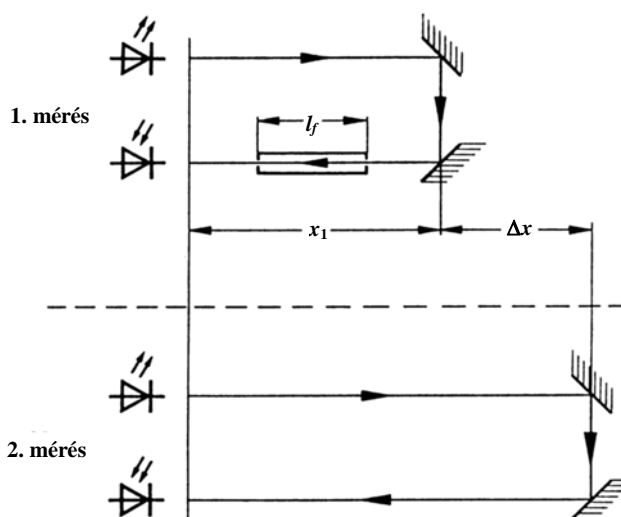
Folyadék törésmutatójának mérése:

A vízzel töltött cső alakú mérőcellát helyezze a mérőegység és saroktükör közé, közvetlenül a mérőegység mellé. A saroktükörrel közelítse meg néhány cm-re a mérőcella végét. Maximalizálja a detektor jelét a saroktükör állító csavarjaival. A fázisállító gomb segítségével állítson elő egyenest az oszcilloszkóp képernyőjén, és olvassa le a

saroktükröt x_1 helyzetét. Öntse ki a vizet a mérőcellából és távolítsa a saroktükröt addig, amíg az ellipszis újra egyenessé alakul. A saroktükröt pontos $x_2 = x_1 + \Delta x$ helyzetét (lásd 4. ábra) a detektor jelének maximalizálása után olvassa le. Mérőszalaggal mérje meg a folyadék l_f hosszát. A víz törésmutatója közvetlenül kiszámolható a mért Δx és l_f értékekből. Jelölje l_i azt az utat, amelyet a fény levegőben tett meg az emittáló és detektáló diódák között akkor, amikor víz volt a mérőcellában. Erre az esetre a fényút megtételéhez szükséges idő:

$$t_1 = \frac{l_i}{c_i} + \frac{l_f}{c_f}, \quad (7)$$

ahol c_i és c_f a fény sebessége levegőben, illetve folyadékban.



4. ábra

A víz kiöntése és a saroktükröt távolítása után a levegőben megtett fényút $l_i^* = l_i + 2 \cdot \Delta x + l_f$ értékre növekedett. Az ennek megtételéhez szükséges idő:

$$t_2 = \frac{l_i + 2 \cdot \Delta x + l_f}{c_i}. \quad (8)$$

Mivel a saroktükröt addig mozgattuk, amíg a $t_2 = t_1$ egyenlőség nem teljesült, a (7) és (8) egyenletek bal oldala azonos, és a jobb oldalak azonosságából kapjuk:

$$n = \frac{c_l}{c_f} = \frac{2 \cdot \Delta x}{l_f} + 1, \quad (9)$$

ahol n a folyadék törésmutatója. (Itt elhanyagoltuk a levegőben és vákuumban mért fénysebesség közötti 10^{-4} nagyságrendű relatív eltérést.) Ennek felhasználásával kapjuk a fénysebességet vízben:

$$c_f = \frac{c_l}{n}. \quad (10)$$

A műanyag téglatest törésmutatójának a mérése:

Ez a mérés is a fenti módszeren alapul, azonban a kiadott test mérete lehetővé teszi, hogy a fény a saroktükör felé haladva, és onnan visszatérve is áthaladjon rajta. Ebben az esetben a (9) egyenlet úgy érvényes, ha abban l_f helyére a téglatest hosszának kétszeresét írjuk.

Feladatok:

- 1) Kapcsolja be a mérőegységet és az oszcilloszkópot! Helyezze a saroktükört az alaplappal 150 cm-es pontjához. Állítsa be a fényutat az emittáló diódától a detektáló diódáig a mérőegység forgatásával és a saroktükörök állító csavarjának a tekerésével. Helyezze a gyűjtőlencsét kb. 5 cm-rel a detektáló dióda elé és állítsa be azt a helyzetét, amelynél maximális a detektált jel.
- 2) Ötszöri méréssel határozza meg levegőben a fénysebességet.
- 3) Háromszöri méréssel határozza meg a víz törésmutatóját, illetve a fény terjedési sebességét vízben.
- 4) Hasonlítsa össze a víz mért törésmutatóját a függvénytáblázatban található értékkel.
- 5) Ötszöri méréssel határozza meg a műanyag téglatest törésmutatóját, és a fény terjedési sebességét a műanyag téglatestben.
- 6) Az oszcilloszkóp Y bemenetén egy (a mérőegységben induktív csatolás miatt keletkező) háttérjel lehet megfigyelni akkor is, ha a detektáló diódára nem érkezik fény. Mekkora mérési hibát okoz ez a háttérjel?

Kérdések:

- A fenti mérésekkel a fény fázis-, vagy csoportsebességét határozta-e meg?
- Alkalmazhatóak-e a mért törésmutatók a fénytörés *Snellius–Descartes*-féle kifejezésében?

Ajánlott irodalom:

 Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., 91.§, 93.§, 96.§, 97.§, 99.§

 Budó Á. - Mátrai T.: Kísérleti fizika III., 246.§, 248.§

13. Lencsék és lencserendszerek fókusz távolságának meghatározása

Célkitűzés:

- A lencsékre, lencserendszerekre vonatkozó ismeretek, továbbá ezek törvényeinek összefoglaló áttekintése.
- A törvények alkalmazásával a legfőbb jellemzőnek, a fókusz távolságnak pontos meghatározása.

Elméleti összefoglaló:

A lencsékhez kapcsolódó alapfogalmak definíciói, a lencsék osztályozása:

Az optikai lencséknek a gyakorlatban leggyakrabban előforduló típusai az ún. gömbi vagy szférikus lencsék, amelyek valamely átlátszó anyagból készült gömbfelületekkel határolt testek. A két gömbfelület geometriai középpontján áthaladó egyenes a lencse optikai fő tengelye.

Aszerint, hogy a lencsén áthaladó párhuzamos fénynyaláb konvergense, illetve divergense válik, a lencse domború vagy gyűjtőlencse, illetve homorú vagy szórólencse. A domború lencsék közepén vastagabbak, a szórólencsék közepén vékonyabbak mint a szélein. A gyűjtőlencse lehet bikonvex, plankonvex és konkávkonvex, a szórólencse pedig bikonkáv, plankonkáv és konvexkonkáv. A lencsék – egy más szempont alapján való osztályozás szerint – két típusra oszthatók:

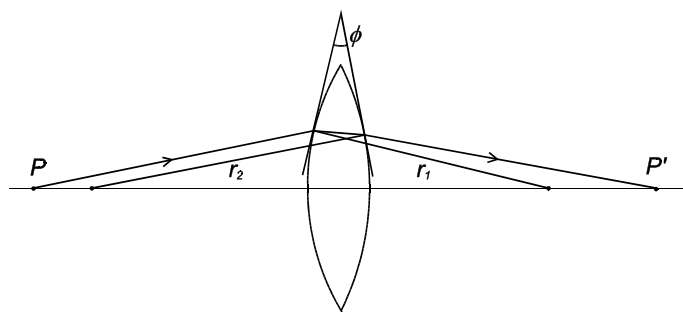
- a) vékony lencsék azok, amelyek vastagsága a határoló gömbfelületek sugaraihoz, illetve a lencse átmérőjéhez képest igen kicsiny,
- b) vastag lencsék azok, amelyekre az előző feltétel nem teljesül.

Vékony lencsék leképezési törvénye:

Egy vékony lencsén áthaladó fénysugár mindkét határolófelületen megtörik. A sugár menetének meghatározásánál az elhanyagolható vastagságú lencsét egy kicsiny φ törőszögű prizmával helyettesíthetjük (1. ábra). Ezen közelítés esetén könnyen kimutatható, hogy egy, az optikai főtengelyen fekvő P pontból kiinduló paraxiális sugarak (ezek a főtengelyhez közeli és azzal kis szöget bezáró sugarak) a főtengelyen fekvő P' ponton haladnak át, azaz a P képe P' . P -nek illetve P' -nek a lencsétől való távolsága a t tárgytávolság, ill. a k képtávolság, amelyek közötti kapcsolatra viszonylag egyszerű számítással kaphatjuk a következő összefüggést:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (1)$$

Itt r_1 és r_2 a két határoló felület görbületi sugara, n pedig a lencse anyagának a környezetére vonatkoztatott relatív törésmutatója. r_1 és r_2 előjeles mennyiségek. Egy felület görbületi sugara akkor pozitív, ha ez a felület kívülről nézve domború, ellenkező esetben negatív. (Például egy bikonvex lencsénél mindkét r pozitív, viszont bikonkávánál mindkettő negatív.)



1. ábra

Az (1) egyenlet jobb oldalán lévő kifejezés határozza meg a lencse fókusz-távolsá-gát:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (2)$$

A lencse méterben megadott fókusztávolságának reciprok értéke a lencse D törőképessége, tehát

$$D = \frac{1}{f}, \quad (3)$$

amelynek egysége a m^{-1} , azaz dioptria.

Az (1) egyenletet a (2) alapján tehát így írhatjuk:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}, \quad (4)$$

melyből látható, hogy f tulajdonképpen $t = \infty$ -hez tartozó képtávolság, illetve a $k = \infty$ -hez tartozó tárgytávolság. Ez azt jelenti, hogy a főtengellyel párhuzamos sugár a fókuszponton, a fókuszponton átmenő sugár pedig a főtengellyel párhuzamosan halad. Vékony lencsék közepe paraxiális sugarakra vékony planparalel lemezként viselkedik, melynél a párhuzamos eltolódás gyakorlatilag zérus, ezért az itt áthaladó sugarak irányváltozás nélkül haladnak át.

Ezen három sugár közül bármely kettő segítségével megszerkeszthető egy pont, a tárgyponatok összességéből pedig a tárgy képe. Mind szerkesztéssel, mind a (4) egyenlet felhasználásával megállapítható, hogy mely esetben lesz ez a kép valódi ($k > 0$), illetve virtuális ($k < 0$). A valódi kép mindig fordított, a virtuális pedig mindig egyenes állású.

A lencséknél általánosan használt fontos fogalom a lineáris vagy oldalnagyítás, amely a kép egy lineáris méretének (K) és a tárgy megfelelő lineáris méretének (T) hányadosa,

$$N = \frac{K}{T}. \quad (5)$$

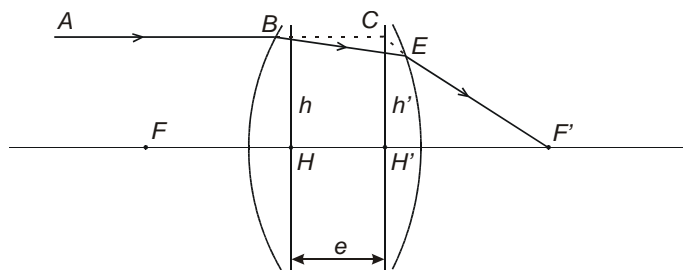
Szerkesztéssel, a hasonló háromszögek törvényeit felhasználva, könnyen megadható a nagyításnak a t tárgytávolsággal, a k képtávolsággal és az f fókusztávolsággal való kapcsolata:

$$N = -\frac{k}{t} = \frac{f}{f-t} = \frac{f-k}{f}. \quad (6)$$

A nagyítás ezen definíciója tartalmazza azt a megállapodást, hogy egyenes állású képnél pozitív a nagyítás.

Vastag lencsék leképezési törvénye:

Míg vékony lencséknél a határoló felületek közötti igen kis távolság miatt a sugár belépésének és kilépésének pontja szinte egybeesik, vastag lencséknél ezen pontok helyei lényegesen különböznek. A vastag lencsébe be- és az abból kilépő paraxiális sugarakra a következő törvény áll fenn (2. ábra).



2. ábra

A főtengellyel párhuzamosan belépő (AB) sugarak a kilépés után olyan (EF') irányban haladnak, hogy a belépő és kilépő sugarak meghosszabbításainak metszéspontjai (C) egy síkban vannak, amely síkot fősíknak nevezünk. Az ábrán h és h' a két fő sík. Ezen síkokat a főtengely a H és H' pontokban dőfi át, ezek a dőféspontok a lencse főpontjai. A fókuszpontokat és a főpontokat közös néven a lencse kardinális pontjainak nevezzük. (Ha a lencse előtti és utáni közeg törésmutatója különböző, akkor még egy nevezetes pontpár, a lencse ún. csomópontjai is belépnek a vastag lencse jellemzői, a kardinális pontok közé.)

A vastag lencse fókusztávolságának a görbületi sugaraktól és a lencse anyagának törésmutatójától való függésére a (2)-nél bonyolultabb formula adódik, nevezetesen

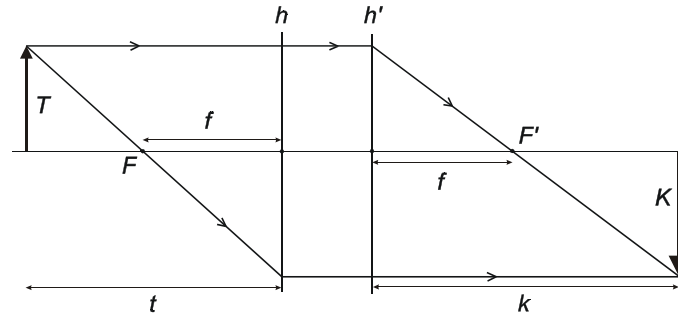
$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) - \frac{(n-1)^2}{n} \frac{e}{r_1 r_2}, \quad (7)$$

ahol e a fősíkok közötti távolság, amely jó közelítéssel helyettesíthető a lencse vastagságával.

A leképezési törvény vastag lencséknél ugyancsak a képszerkesztésnél keletkező hasonló háromszögek törvényeinek felhasználásával nyerhető. A 3. ábra alapján felírható, hogy

$$-\frac{K}{T} = \frac{k}{t} = \frac{f}{t-f}, \text{ vagy } \frac{k}{t} = \frac{k-f}{f}, \quad (8)$$

amelyből szintén a (4) összefüggés adódik.

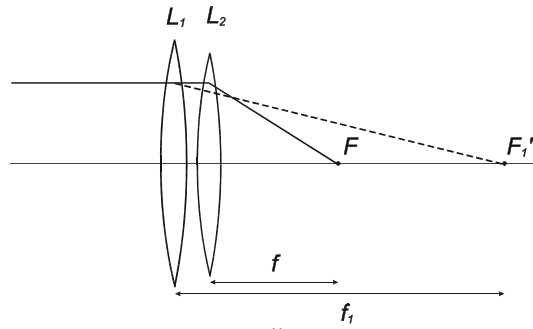


3. ábra

Az ábráról az is kitűnik, hogy a t , k és f távolságokat a fókuszoktól kell mérni. Az oldalnagyításra most is érvényesek a (6)-ban megadott összefüggések.

Lencserendszerekre vonatkozó törvények:

Több, közös főtengelyű lencse lencserendszert alkot, amely különösen a lencsehibák korrigálásánál játszik fontos szerepet.



4. ábra

a) A legegyszerűbb rendszer két, egymással érintkező vékony lencséből áll (L_1 és L_2). Ezen rendszer f fókusz távolságát a következő gondolatmenet alapján számíthatjuk ki (4. ábra). Az L_1 lencsére a főtengellyel párhuzamosan érkező fénysugár a főtengelyt f_1 távolságban metszené, itt keletkezne a végtelen távolban lévő pont képe. Ez a kép az L_2 lencse odahelyezésekor az L_2 lencse számára egy virtuális tárgy szerepét tölti be,

tehát $t_2 = -f_1$. Erről a tárgyról az L_2 lencse az f távolságban, tehát a lencserendszer fókuszában hozza létre a képet, tehát $k_2 = f$. Felírva L_2 -re a leképezési törvényt, kapjuk, hogy

$$-\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f} = \frac{1}{f_2}, \quad (9.a)$$

amelyből adódik:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}, \quad (9.b)$$

vagyis a rendszer fókusz távolságának reciprokja egyenlő az összetevő lencsék fókusz távolságai reciprokjainak összegével, azaz a törőképeségek összegződnek,

$$D = D_1 + D_2. \quad (9.c)$$

b) Lencserendszer egész általános eseténél két vastag lencsét helyezünk el közös főtengelyen úgy, hogy az egymás felé eső fősíkjaik közötti távolság d . Ez esetben a rendszer fókusz távolságának kiszámítása már bonyolultabb és hosszadalmasabb. Az elvégzett számításokból az eredő fókusz távolságra a következő törvény adódik:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}. \quad (10)$$

Gyűjtőlencsék fókusz távolságának meghatározása:

A fókusz távolság meghatározására a lencsék leképezési törvényét használjuk. A mérésnél az jelent problémát, hogy mind a tárgytávolságot, mind pedig a képtávolságot a lencse főtengelyeitől kell mérni, már pedig ezek helyét pontosan nem ismerjük. Ezen nehézség kiküszöbölését részben elérhetjük a *Bessel*, illetve teljesen az *Abbe*-módszer használatával.

a) *A Bessel-féle módszer*

Legyen egy tárgy és annak képe (az ernyő) közötti távolság l (5. ábra). A t tárgytávolság a tárgynak a tárgyoldali főtengelytől, a k képtávolság pedig a képnek a képoldali főtengelytől mért távolsága. Így

$$t + k + e = l, \quad (11)$$

ahol e a két fősík közötti távolság. Ha $e \ll t + k$, akkor $k = l - t$, és a távolságtörvényt így írhatjuk:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{l-t} = \frac{1}{f}. \quad (12)$$

Ezen egyenletből t -re akkor kapunk valós megoldást, ha

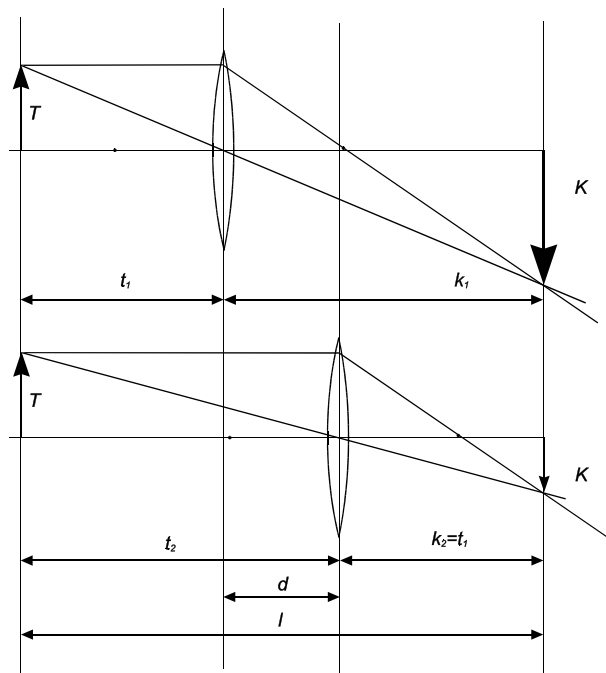
$$l^2 - 4lf \geq 0. \quad (13)$$

Két különböző megoldás van, ha $l > 4f$, tehát ez esetben két tárgytávolságnál kapunk éles képet. A (4) egyenlet szimmetrikus t -re és k -ra, ami azt jelenti, hogy ha egy t_1 tárgytávolsághoz tartozik egy k_1 képtávolság, akkor egy $t_2 = k_1$ tárgytávolsághoz pedig $k_2 = t_1$ képtávolság tartozik. A 5. ábráról leolvasható hogy $2t_1 + d = l$, vagyis

$$t_1 = \frac{l-d}{2} \quad (14)$$

és ebből

$$k_1 = l - t_1 = \frac{l+d}{2}. \quad (15)$$



5. ábra

Ezeket beírva a lencseegyenletbe, kapjuk, hogy

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{l-d} + \frac{2}{l+d} = \frac{4l}{l^2 - d^2}, \quad (16)$$

vagyis

$$f = \frac{l^2 - d^2}{4l}. \quad (17)$$

Az l és d mennyiségek mérhetőek, és mérésükkel f meghatározható. A *Bessel*-módszer előnye, hogy viszonylag gyorsan elvégezhető a mérés. Továbbá jól alkalmazható a meniszkusz-lencséknel, melyeknél az egyébként egymáshoz közeledő fókuszok a lencsén kívül esnek.

b) *Abbe-féle módszer*

A lencse alapegyenletét szorozzuk be t -vel, akkor $-k/t = N$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$1 - \frac{1}{N} = \frac{t}{f}. \quad (18)$$

Ha két különböző t értékre felírjuk (18)-at és vesszük azok különbségét, kapjuk, hogy

$$\frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_2} = \frac{t_1 - t_2}{f}. \quad (19)$$

A $t_1 - t_2 = \Delta$ jelöléssel a következő kifejezés adja a fókusztávolságot:

$$f = \frac{N_1 N_2}{N_2 - N_1} \Delta. \quad (20)$$

Így megmérve a tárgy két különböző helyzeténél a nagyításokat, továbbá a tárgytávolság megváltozásának nagyságát, a fókusztávolság kiszámítható.

A nagyítások könnyen meghatározhatók, ha tárgyként pl. egy megvilágított dróthálót használunk, melynek rácsállandóját (két huzalának egymástól való távolságát) egy leolvasó mikroszkóppal a benne lévő skála segítségével skálaegységekben megmérjük. A képnagyságot ugyanilyen módon határozzuk meg, az éles képet ugyanis szintén mikroszkóppal nézzük.

Az *Abbe*-módszer használatánál a fókuszok helyét nem kell ismernünk, így az ebből származó hibát teljesen kiküszöböltük.

Szórólencsék gyűjtőtávolságának mérése:

Mivel szórólencsékkel ernyőn felfogható képet létrehozni nem lehet, ezért ezek fókusz-távolságát az eddig megismert módszerekkel nem lehet megmérni. De ha a szórólencsét (f_1) egy olyan ismert fókusz-távolságú gyűjtőlencsével (f_2) kapcsoljuk össze, hogy az így létrehozott lencserendszer már gyűjtőlencseként működjön, ennek fókusz-távolsága az *Abbe*-módszerrel meghatározható. A (10) egyenletből látható, hogy két tagból álló lencserendszer f fókuszának reciproka a d -nek, a rendszert alkotó két lencse egymás felé eső fókuszpontjai közötti távolságnak lineáris függvénye. Ezen egyenes iránytangense a $-1/f_1 f_2$ mennyiség, ebből f_1 kiszámítható.

Feladatok:

- 1) Tanulmányozza a kiadott eszközöket, és állítsa össze a mérési elrendezést.
 - a) A lámpaházban lévő lencsével egy eléggé távoli falra (kb. 6 – 8 m) képezze le a fényforrás izzószálat, így jó közelítéssel párhuzamos sugárnyalábót állít elő.
 - b) A megvilágító lámpa tartójának megfelelő beállításával tűzze ki az optikai tengelyt úgy, hogy az legyen a sínnel párhuzamos. Helyezze el a lámpa elé a kiadott interferenciaszűrőt, hogy a mérést monokromatikus fénnel végezze.
 - c) A tárgyat, amely egy drótháló, helyezze egy lovasba, tolja azt egészen a leolvasó-mikroszkóp ernyőjéhez és állítsa be a mikroszkópot úgy, hogy a rácsot élesen lássa. Megjegyzendő, hogy a majd létrehozandó képet is a mikroszkóppal nézi. Amikor élesen látja a képet, a kép ugyanazon síkban van, mint a rács akkor, amikor azt élesen látta. Határozza meg a mikroszkóppal skálárészben a tárgy méretét, azaz a drótháló rácsállandóját, és jegyezze fel a tárgyat tartó lovas eme kezdeti helyzetét az optikai sín mérőszalagján.
 - d) Becsléssel határozza meg a gyűjtőlencse fókusz-távolságát. Röviden írja le a becslés módját is.
 - e) A becsült fókusz-távolság alapján határozza meg, hogy mekkora minimális távolságot kell beállítania a tárgy és a kép között.

- f) Állapítsa meg, mekkora maximális távolságra helyezhető a tárgy a képsíktól, hogy a lencsét a kezével elérje, így a lencse helyzetét változtatni tudja, hogy több helyzetben figyelhesse meg az éles képet a mikroszkóppal.
- 2) Határozza meg a lencsék fókusz-távolságát.
- a) Először *Bessel*-féle módszerrel határozza meg a lencsék fókusz-távolságát. Állítson be három különböző tárgy-ernyő távolságot az 1) feladat e) és f) pontjában becsült értékek figyelembevételével. Három különböző l értéknél mérjen. Amikor a tárgy helyzetét megválasztottuk, olvassuk le a tárgyat tartó lovas helyét az optikai sín mérőszalagján. Ennek és a kezdeti helyzethez tartozó (lásd 1.c pont) értéknek a különbsége adja meg l -et.
- b) Határozza meg ezután *Abbe*-féle módszerrel a lencsék gyújtótávolságát. A tárgynak egy Δ eltolásánál háromszor mérje meg az N_1 és N_2 nagyításokat, és ezek középértékével számolja ki f értékét. Ismétlje meg ezt a mérést két másik Δ -nál is. Melyek a kétféle módszer hibaforrásai? Becsülje meg, mekkora pontatlanságot okoznak a leolvasásból származó hibák.
- 3) Határozza meg a lencserendszer fókusz-távolságát a d^* (1, 2, 3, 4 cm) függvényében! (A d^* a lencsék főtávolságainak tényleges d távolságától egy állandóval eltérhet.) Ábrázolja az $1/f = g(d^*)$ függvényt, és ebből grafikusán határozza meg a szórólencse fókusz-távolságát.

Ajánlott irodalom:

📖 Budó Á.-Mátrai T.: Kísérleti fizika III., 255.§ - 258.§

14. Mérések mikroszkóppal

Célkitűzés:

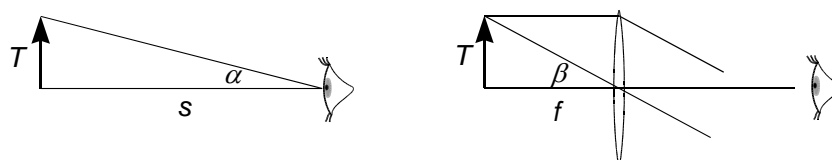
- Mikroszkóp működési elvének megismerése.
- Skálahitelesítés elvének megismerése.
- A mikroszkóp nagyításának meghatározása. A tisztalátás távolságának, továbbá tárgyak síkbeli méreteinek és vastagságának mérése.

Elméleti összefoglaló:

Az emberi szem látásélességének, azaz két pont egymástól való megkülönböztethetőségének határszöge kb. 1 ívperc. Ha a tárgyat a szemünkhöz közelítjük, több részletet tudunk megfigyelni, olyanokat, amelyek látószöge nagyobb lesz ennél a határszögnél. Ekkor a tárgy egyre nagyobbnak látszik, egyre nagyobb lesz az ún. *teljes látószöge*, azaz a tárgy két szélső pontjáról szemünkbe érkező sugarak által bezárt szög. A tárgy közelítésének határt szab a szem alkalmazkodóképessége. A szem *közélpontja* az a távolság, amelyen belül a szem már nem tud alkalmazkodni, a szemlencse nem tudja a tárgyat az ideghártyára élesen leképezni. Körülbelül $s = 250$ mm az a távolság, ahonnan egy egészséges felnőtt szemlencséje hosszabb ideig tudja kifáradás nélkül a tárgyat leképezni. Ezt a távolságot nevezzük a *tisztalátás távolságának*.

A látószög növelését lehetővé teszi az egyszerű *nagyító* vagy *lupe*. Ez egy gyűjtőlencse, amely a fókusz távolságán belülre helyezett tárgyról egyenesállású, virtuális, nagyított képet hoz létre. Lupe szokásos használatánál a tárgyat a lupétól fókusz távolságra helyezzük el. Ekkor a tárgyról kiinduló sugarakat a lencse párhuzamosítja, ezért végtelenre akkomodált szemmel vizsgálhatjuk a keletkező virtuális képet, mely esetben a szem nem fárad. A szögnagyítást azon két szög, β és α hányadosa adja, amely szögek

alatt látjuk a tárgyat, ha azt lupével, illetve szabad szemmel nézzük a tisztalátás távolságából (1. ábra).



1. ábra

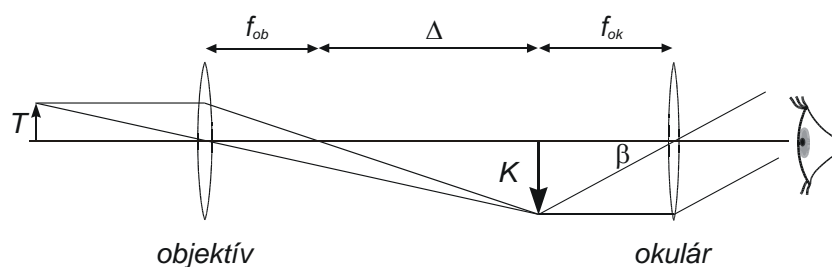
Az 1. ábra jelöléseinek megfelelően:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{T}{s}, \text{ és } \operatorname{tg} \beta = \frac{T}{f}.$$

Kis szögek esetén a szögnagyítás az alábbi formulával közelíthető:

$$N = \frac{\beta}{\alpha} \approx \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{s}{f}. \quad (1)$$

Nagyobb nagyítást, tehát további látószög növelést összetett nagyítóval, *mikroszkóppal* érhetünk el. A mikroszkóp lényegében két gyűjtőlencserendszerből áll, amelyeket sematikusán egy-egy lencsével helyettesíthetünk (2. ábra). Itt a tárgyról az *objektív* nagyított, valódi és fordított állású, ún. közbülső képet (*K*) ad, amelyet az *okulárral* azaz egy lupével tovább nagyítunk. Ha az okulárt úgy helyezzük el, hogy objektív által előállított valódi kép az okulár fókusz síkjában legyen, ekkor a végső kép virtuális, a tárgyhoz viszonyítva fordított állású, erősen nagyított lesz. Az objektív és az okulár egymás felé eső fókuszpontjainak távolságát *optikai tubusosszáknak* (Δ) nevezzük, szokásos értéke 160 mm.



2. ábra

A mikroszkóp nagyítása azt adja meg, hogy a tisztalítás távolságában elhelyezett tárgy két kiszemelt pontjáról a szemünkbe érkező sugarak által bezárt szög, a látószög hányszorosára növekszik, ha a tárgyat a mikroszkópon át szemléljük.

Az objektív nagyítása az általa létrehozott kép nagyságának (K) és a tárgy nagyságának (T) hányadosa. Ez a 2. ábra alapján hasonló háromszögek segítségével

$$N_{ob} = \frac{K}{T} = \frac{\Delta}{f_{ob}} \quad (2)$$

alakban adható meg.

Az okulár az objektív által létrehozott valódi, fordított állású képet mint lupe nagyítja tovább. Az össznagyítást az objektív és az okulár nagyításainak szorzata adja meg:

$$N_{\bar{o},névl} = N_{ob} N_{ok} = \frac{\Delta}{f_{ob}} \frac{s}{f_{ok}}. \quad (3)$$

A tubusban esetenként további lencsét helyeznek el, amelyet tubuslencsének nevezünk. Az össznagyítás számításakor a nagyításban ezen lencse nagyítását is figyelembe kell venni. Így a mikroszkóp névleges össznagyítása:

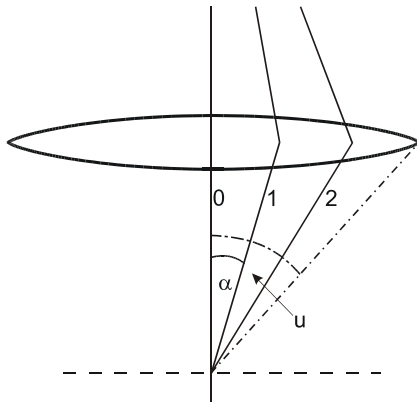
$$N_{\bar{o},névl} = \frac{\Delta}{f_{ob}} \frac{s}{f_{ok}} N_{tubus}. \quad (4)$$

A mikroszkópot használó személy tényleges tisztalítás távolsága eltérhet az átlagos $s = 250$ mm-től, ekkor a tapasztalt nagyítás eltér a névleges értéktől.

$$N_{\bar{o},mért} = N_{\bar{o},névl} \frac{s'}{s}, \quad (5)$$

ahol s' a mérő személy tisztalításának távolságát jelenti.

Nagy nagyításoknál a geometriai optikai tárgyaláson túl figyelembe kell venni a fény hullámtermészetét. A mikroszkóp feloldásának határt szab a *fényelhajlás* jelensége. *Abbe* elmélete szerint egy d rácsállandójú rácson két karcolás közötti d távolság akkor bontható fel, ha legalább az első rendben elhajlított sugarak átmennek az objektíven, vagyis az objektív u fél nyílásszöge nagyobb az 1. rendben elhajló sugarak α szögénél (3. ábra).



3. ábra

Az első rendre:

$$d \cdot \sin \alpha = \lambda, \text{ azaz } \sin \alpha = \frac{\lambda}{d}. \quad (6)$$

A d távolság tehát felbontható, ha

$$\sin u \geq \frac{\lambda}{d}. \quad (7)$$

Ha a tárgy és a lencse között n törésmutatójú közeg van, a hullámhossz λ/n -re változik, így a *feloldási határ*:

$$d = \frac{\lambda}{n \cdot \sin u} \quad (8)$$

lesz, illetve ennek reciprokja a *felbontóképesség*:

$$R = \frac{1}{d} = \frac{n \cdot \sin u}{\lambda}. \quad (9)$$

Az objektív felbontóképességét döntően meghatározó $NA = n \cdot \sin u$ mennyiséget az *objektív numerikus apertúrájának* nevezik. Ezzel tehát a *felbontóképesség*:

$$R = \frac{NA}{\lambda}. \quad (10)$$

A felhasználók számára az objektíveken feltüntetik a nagyítást és a numerikus apertúrát (pl. 10/0,25), esetleg az optikai tubushosszat milliméterben és az objektív munkatávolságát, amelyet a tárgy és az objektív közötti távolság ad meg.

Mérés menete:

Az objektív nagyításának meghatározásához egy hiteles skálát, ún. *tárgymikrométert* helyezünk a tárgyasztalra. A mikroszkóp élesre állítása után együtt jelenik meg a tárgymikrométer és az okulármikrométer képe. A kettő gondos párhuzamosítása és összehasonlítása után az

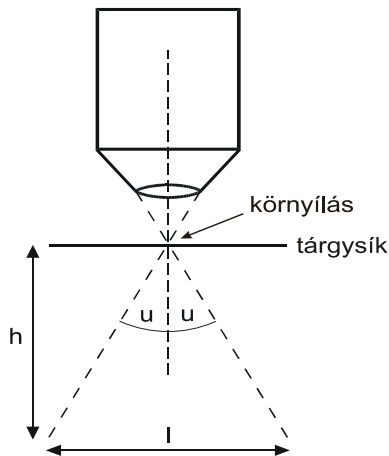
$$N_{ob} \cdot N_{tubus} = \frac{K}{T} = \frac{\text{okulár mm-ek száma}}{\text{tárgymikrométer mm-ek száma}} \quad (11)$$

összefüggés segítségével N_{tubus} ismeretében N_{ob} számolható.

A mikroszkóp *össznagyítása* a következőképpen határozható meg: helyezzen a tárgyasztalra egy tárgymikrométert és állítsa élesre. Egyik szemével a mikroszkópon át nézze ezt a beosztást, a másikkal pedig a *tisztalátás* távolságában tartott mm-es beosztást (pl. egy vonalzón vagy tolómérő milliméteres beosztását). A mikroszkópban látott nagyított kép k darab 0,1 mm-es beosztása essék egybe a vonalzon t milliméter távolsággal. Ekkor az össznagyítás:

$$N_{\text{össz, mért}} = \frac{t}{0,1 \cdot k}. \quad (12)$$

A mikroszkóppal való *basszmérések* célját szolgálja az ún. *okulármikrométer*. Az okulármikrométer üveglemezre karcolt ismert (pl. 0,1 mm vagy 0,05 mm) vagy ismeretlen beosztású skála – ez utóbbi esetben hitelesíteni kell egy tárgymikrométerrel –, amelyet a valódi kép keletkezésének helyén helyeznek el, így az okulárral egyszerre látjuk élesen a mikroszkópi képet és az okulármikrométer skáláját.



4. ábra

A *numerikus apertúra* a 4. ábra alapján a következőképpen határozható meg. Helyezzen a tárgyasztalra egy kis környílást és állítsa élesre a szélét. Ezek után a tárgyasztal mozgatásával állítsa úgy a lyukat, hogy a mikroszkóp képmezőjében egyáltalán ne látszódjék. Vegye ki a kondenzorlencsét, amely a tárgyasztal alatt található, és a tárgy optimális kivilágítását teszi lehetővé. Az okulárt cserélje ki egy lyukblendére. A tárgyasztal alá helyezzen el egy milliméter beosztással ellátott asztalt és ezen két korongot. A jól megvilágított korongokat távolítsa el annyira, hogy a látómezőből éppen eltűnjenek. Ekkor mérje meg a két korong szélei közötti l távolságot, valamint a kis asztal és a környílás közötti h távolságot. A numerikus apertúra az alábbi összefüggés alapján számolható:

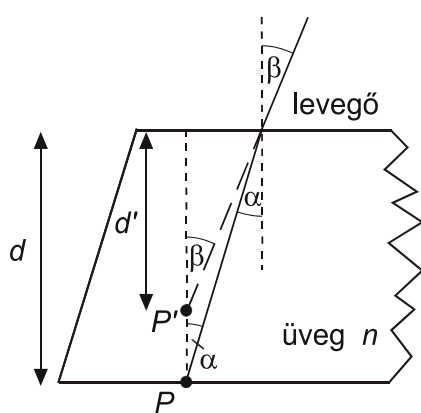
$$NA = n \cdot \sin u, \quad (13)$$

esetünkben:

$$NA = n \cdot \sin\left(\arctg \frac{l}{2b}\right), \quad (14)$$

ahol $n = 1$, a levegő törésmutatója.

Üveglemezek törésmutatójának meghatározása: az 5. ábrán feltüntetett üveglemez alsó síkjának egy P pontjából kiinduló sugarak a fénytörés miatt a P' pontból látszanak kiindulni. A Snellius-Descartes törvény szerint $n \cdot \sin \alpha = \sin \beta$, továbbá a háromszögek-



5. ábra

ből: $d \cdot \operatorname{tg} \alpha = d' \cdot \operatorname{tg} \beta$, ami kis szögeknél a következő formulához vezet:

$$n = \frac{d}{d'}. \quad (15)$$

A d' a mikroszkóp finombeállítójával oly módon mérhető, hogy az üveglemez felső és alsó felületét egymás után élesre állítjuk az üvegen át. A d' elmozdulást a finombeállító csavarbeosztásán skálárészben olvassuk le. Ezután levegőn át állítjuk élesre az üveglemez felső és alsó felületét, amit az üveglemez ferdére

csiszolt oldallapja tesz lehetővé, a finombeállítóval ekkor mért elmozdulás adja a d értékét.

Mérési feladatok:

- 1) Határozza meg az objektívek nagyítását. A tárgymikrométer plexibe foglalt 0,1 mm-es beosztású skála. A 7-szeres nagyítású okulárba szintén 0,1 mm-es okulármikrométer van beépítve. A tubusnagyítás $N_{tub} = 1,5$.
- 2) Mérje meg a mikroszkóp össznagyítását. A mérést végezze el az 5x és 10x okulárokkal és mindhárom objektívvel. Ábrázolja a mért $N_{\bar{o},mért}$ össznagyításokat a számított $N_{\bar{o},mért} = N_{ob} \cdot N_{ok} \cdot N_{tub}$ nagyítás függvényében. Állapítsa meg saját tisztalításának távolságát.
- 3) Hitelesítse a mikroszkóp okulármikrométerének skáláját a mikroszkóp három objektívjénél. Használja a hitelesnek tekintett tárgymikrométert.

- 4) Mérje meg a kiadott rács rácsállandóját, valamint becsülje meg a kiadott biológiai minta méreteit a már hiteles okulármikrométerrel.
- 5) Mérje meg az objektívek numerikus apertúráját. A kapott értékeket vesse össze az objektíveken látható NA értékekkel. Számolja ki mérésének a relatív eltérését.
- 6) Számítsa ki a mikroszkóp felbontóképességét és a feloldási határt az 550 nm-es hullámhossznál a mért numerikus apertúra-értékekkel.
- 7) Mérje meg mikroszkóppal a kiadott üveglemez törésmutatóját.

Ajánlott irodalom:

📖 Budó Á. - Mátrai T.: Kísérleti fizika III., 265.§, 266.§, 286.§, 287.§

📖 Lovas Béla: Mikroszkóp, mikrokozmosz

📖 Bernolák K. - Szabó D. - Szilas L.: A mikroszkóp, 176-188. o.

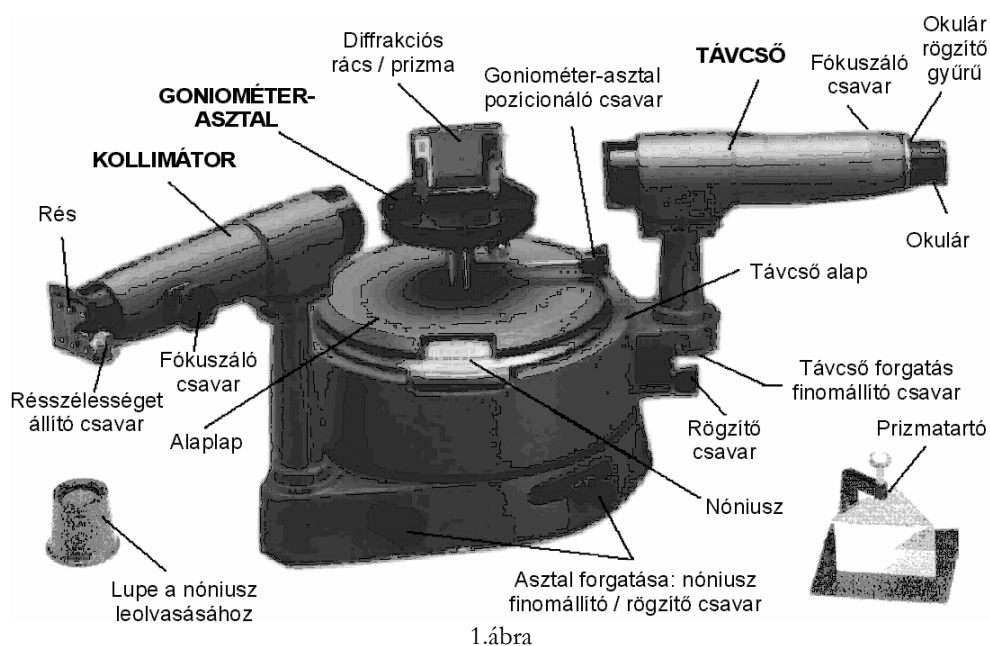
15. Prizma törésmutatójának és diszperziójának meghatározása

Célkitűzés:

- Prizma törésszögének és törésmutatójának meghatározása.
- A törésmutató hullámhosszfüggésének vizsgálata.
- Prizma anyagának meghatározása diszperziója alapján.

Elméleti összefoglaló:

A spektroszkópia célja különböző anyagok összetételének, atomok és molekulák szerkezetének vizsgálata, az általuk kibocsátott vagy elnyelt fény tanulmányozásával.



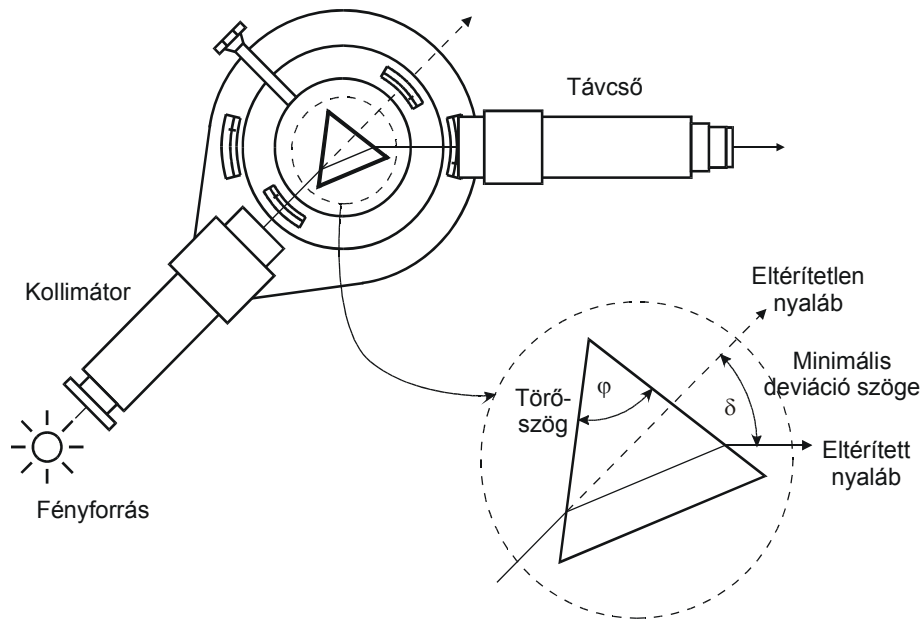
A gyakorlatban használt spektroszkópok fő elemei az 1. ábrán láthatóak: a vizsgálandó fény *kollimátoron* áthaladva esik a *spektrális bontóelemre*, amely lehet prizma vagy diffrakciós rács, majd az ez által felbontott spektrum a *távcsővel* tanulmányozható. A kollimátor-lencse a fókuszában elhelyezkedő résen át belépő fényből párhuzamos sugarakból álló nyalábot hoz létre. A nem-monokromatikus fény különböző hullámhosszú komponensei a prizmán vagy rácson való áthaladás során a fénytörés illetve diffrakció következtében különböző irányokban térülnek el. Mivel párhuzamos sugárnyaláb esik a spektrális bontóelemre, így a végtelenre állított távcsővel a belépő rés éles képét láthatjuk. A távcsőnek a bontóelem körüli forgatásával a kollimátor belépő részének különböző színű éles képeit találhatjuk meg különböző irányokban. A spektrális bontóelem karakterisztikájának ismeretében a távcső elforgatásának szögéből a hullámhossz meghatározható.

A prizma a spektroszkópiában használt legegyszerűbb optikai elemek közé tartozik. Alkalmazása a diszperzió jelenségén, azaz a törésmutató hullámhosszfüggésén alapul: a prizma bocsátott nem-monokromatikus fény spektrális komponensei a fénytörés során különböző mértékben térülnek el. Az eltérülés szöge a hullámhossznak a prizma anyaga és törőszöge által meghatározott nemlineáris függvénye. Prizmás spektrométerrel végrehajtott mérések során először ismert spektrumú fényforrás segítségével a hullámhosszat az eltérülési szög függvényében ábrázoló grafikont, azaz hitelesítési görbét készítünk. Ennek segítségével kísérleti úton meghatározható egy ismeretlen fényforrás spektruma, vagy ismert spektrumú fényforrás alkalmazásával információt kaphatunk a prizma anyagának optikai jellemzőiről: törésmutatójáról és diszperziójáról.

Ha az adott hullámhossz és prizma esetében létezik szimmetrikus sugármenet, akkor az ilyen áthaladás során az eltérülés szöge a lehető legkisebb. Ezt a szöget a minimális deviáció szögének nevezzük, amely a prizma törésmutatójától és törőszögétől függ (2. ábra). Ezen mennyiségek között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$n(\lambda) = \frac{\sin \frac{\varphi + \delta(\lambda)}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}, \quad (1)$$

ahol $n(\lambda)$ a törésmutató, $\delta(\lambda)$ a minimális deviáció szöge az adott hullámhosszon, φ a prizma törőszöge. Az (1) összefüggés alapján látható, hogy adott prizma esetében a törésmutató hullámhosszfüggésének meghatározása a minimális deviáció szögének a hullámhossz függvényében történő mérésével lehetséges.



2. ábra

Adott anyag esetén a diszperziót, mint fizikai mennyiséget a törésmutató hullámhossz szerinti deriváltjaként definiáljuk:

$$D(\lambda) = \frac{dn(\lambda)}{d\lambda}. \quad (2)$$

Az optikai anyagok diszperziójának jellemzésére a gyártó cégek általában a

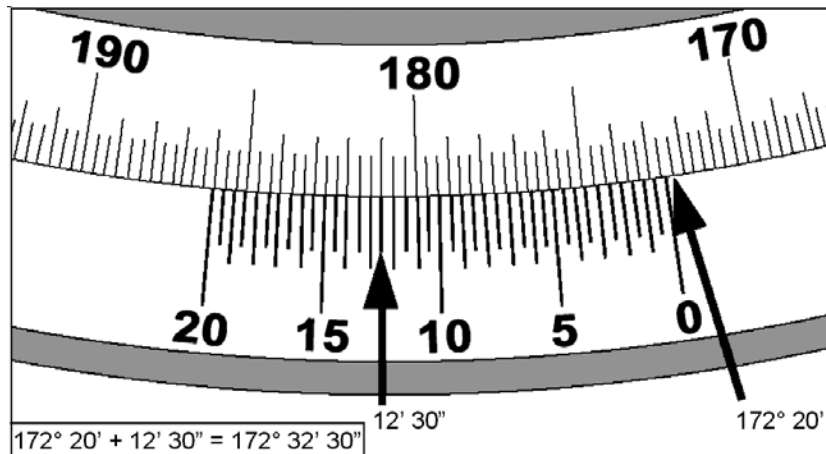
$$\nu = \frac{n(\lambda_D) - 1}{n(\lambda_F) - n(\lambda_C)} \quad (3)$$

Abbe-féle számot adják meg, itt az indexek a *Fraunhofer*-féle spektrumvonalakra utalnak: $\lambda_D=589,3$ nm , $\lambda_F=486,1$ nm , $\lambda_C=656,3$ nm .

A spektrométer leírása:

A mérés során használandó spektrométer az 1. ábrán látható. Az eszköz alapja egy precíziós forgatást biztosító goniométer. Ezen helyezkedik el a kollimátor, a spektrális bontóelem és a távcső. A kollimátor és a távcső a goniométer forgástengelyére merőleges optikai tengellyel rendelkeznek. Mindkettő szintezhető, és a színi hibák elkerülése érdekében akromatikus lencsét tartalmaz. A kollimátor résének szélessége és helyzete változtatható. A távcső fonálkeresztje a spektrumvonalak pozíciójának pontos beállítását szolgálja.

A távcső és a spektrométer bontóelemét tartó asztal egymástól függetlenül forgatható, helyzetüket rögzítve egy csavar segítségével a beállítás tovább finomítható. Pozíciójuk a fix skálához képest nóniusz segítségével $30''$ pontosan határozható meg (3. ábra). A spektrométer asztalának magassága állítható, és az asztal síkja a szintező csavarok segítségével a kollimátor és a távcső optikai tengelyével párhuzamossá tehető.



3. ábra

Feladatok

- 1) Azonosítsa a spektrométer optikai és mechanikai elemeit az 1. ábra segítségével, majd hozza a goniométert mérőkész állapotba az alábbiak szerint.
 - a) Amikor belenéz a távcsőbe, csúsztassa az okulárlencsét (szemlencsét) addig, amíg a fonálkereszt képe éles nem lesz. Lazítsa meg az okulárlencse tubusát rögzítő gyűrűt, forgassa a tubust addig, amíg a fonálkereszt egyik ága függőleges nem lesz. Rögzítse a tubust és fókuszáljon újra, ha szükséges.
 - b) Állítsa végtelenre a távcsövet úgy, hogy egy távoli tárgyat élesen lásson, majd fordítsa szembe a kollimátorral.
 - c) A szélesség állító csavar segítségével nyissa ki a kollimátor rését, és világítsa meg (helyezzen elé egy jól kivilágított fehér lapot). A kollimátor rését mozgató csavarral állítsa be azt a helyzetet, amikor a végtelenre állított távcsővel a rés éles képe látható. A távcső beállításán közben már nem szabad módosítani. Ha szükséges, forgassa a rést függőleges helyzetbe.
 - d) Szorítsa meg a távcső rögzítő csavarját, majd a finomállító csavarral állítsa a fonálkereszt függőleges ágát a rés fix élére.
 - e) A kollimátor helyzete rögzítve van a goniométer alsó körosztásához. Mielőtt a prizmat a prizmatartó-asztalra helyezné, pontosan határozza meg az el nem térített fény irányát. A távcső helyzetét az egymáshoz képest 180° -ra lévő két nóniusz egyikével határozhatja meg $30''$ pontosan (3. ábra). Ez az érték lesz a nullhelyzet, amelyhez az eltérülés szögét viszonyítja. A nóniusz leolvasását megkönnyíti a mellékelt lupe használata.
 - f) Világítsa ki a rést a Hg-Cd lámpa fényével. Helyezze a prizmat a spektrométer forgóasztalára úgy, hogy annak törőéle a Hg-Cd lámpának a kollimátoron áthaladó fényét két azonos intenzitású reflektált nyalábra bontsa. A szintezőcsavarok segítségével állítsa be a prizma asztalát úgy, hogy a rés prizmalapokon reflektált képeinek magassága a távcsőben ugyanolyan legyen, mint az eltérítetlen nyaláb esetén. Ekkor a törőél párhuzamos lesz a goniométer asztalának

forgástengelyével. Ezzel mérésre kész az eszköz, ügyeljen arra, hogy ez a beállítás a mérés végéig megmaradjon.

- 2) Határozza meg a prizma törőszögét. A rés prizma oldaláról reflektált képeinek segítségével mérjen.
- 3) Határozza meg a He és Hg-Cd lámpák spektrumvonalaihoz tartozó minimális deviáció szögeit. (A prizma és a távcső egyidejű forgatásával keresse meg azt a helyzetet, amelyben a vizsgált spektrumvonal nem halad tovább.)
- 4) Számítsa ki és ábrázolja a prizma anyagának törésmutatóját a hullámhossz függvényében. A spektrumvonalak hullámhosszát a *Mellékletben* található táblázatokból keresheti ki. Vegye figyelembe a táblázatban megadott színeket, relatív intenzitásokat valamint a szem érzékenységi görbét. Célszerű a munkát a He lámpa vonalainak azonosításával kezdeni. A törésmutató négy tizedes jegyre kerekített értékével dolgozzon.
- 5) Az előző feladat végrehajtása során kapott $n(\lambda)$ grafikon felhasználásával számítsa ki 20 nm-enként a prizma anyagának $dn/d\lambda$ diszperzióját és ábrázolja a hullámhossz függvényében. Numerikus differenciálást végezzen.
- 6) Számítsa ki a prizma anyagára az *Abbe*-féle számot az $n(\lambda)$ grafikon segítségével. A különböző üvegtípusokra vonatkozó adatokat megtalálja a Schott cég katalógusában. A grafikon függőleges tengelyén a nátrium D-vonalára vonatkozó törésmutatót, a vízszintesen az *Abbe*-féle számot ábrázolták. Ennek segítségével határozza meg a kiadott prizma anyagának típusát.

Kérdések:

- Miért különbözik az anyagok törésmutatója 1-től?
- Lehetséges-e a minimális deviáció szögének mérése $n = 1,6$ törésmutatójú, $\varphi = 90^\circ$ törőszögű prizma felhasználásával?

Ajánlott irodalom

📖 Feynman: Mai fizika, 3. kötet, 31/1, 2, 3.

📖 Budó Á. – Mátrai T.: Kísérleti fizika III., 248.§, 251.§, 303.§

📖 Mátrai T. – Csillag L.: Kísérleti spektroszkópia, 109-122. o.

16. Hullámoptikai kísérletek He-Ne lézerrel

Célkitűzés:

- A fény hullámtermészetének tanulmányozása.

Balesetvédelmi figyelmeztetés:

A kísérletek során használt He-Ne lézer $\lambda = 632,8$ nm-es hullámhosszon $\Delta\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$ nm sávszélességű, 1 mW átlagteljesítményű fényt sugároz. A nyaláb divergenciája $\theta = 10^{-3}$ rad. Ha a nyaláb a szembe jut, akkor az $f = 1$ cm fókusztávolságú szemlencse a retinának $(f \cdot \theta)^2 = 10^{-6}$ cm²-es felületére gyűjti össze a mW-os sugárzást, ahol a megvilágított felületen a fényteljesítmény-sűrűség értéke 1 kW/cm². Ekkora megvilágítás hatására a retina súlyosan és maradandóan károsodik. Ezért:

**A LÉZERNYALÁBBA KÖZVETLENÜL BELENÉZNI SZIGORÚAN
TILOS!**

Ugyanígy kerülni kell a fényes, tükröző felületekről visszaverődő nyalábokat is! A gyakorlat teljes elvégzése alatt ügyelni kell a laboratóriumban dolgozó többi ember szeme épségére is! A lézernyaláb által megvilágított, nem tükröző felület szemlélése veszélytelen.

A gyakorlaton alkalmazott lézer ki- és bekapcsolását csak a gyakorlatvezető végezheti el!

Elméleti összefoglaló:

A vizsgált jelenségeket az 1 - 5. feladatokban a *Fraunhofer*, a 6 - 7. feladatokban pedig a *Fresnel*-féle összeállításban fogjuk tanulmányozni. Az első esetben az ernyőt a tárgytól végtelen távol kell elhelyezni. Végtelen távolinak tekinthető az ernyő, ha l távolsága az elhajlító tárgytól sokkal nagyobb, mint d^2/λ , ahol d az elhajlító tárgy

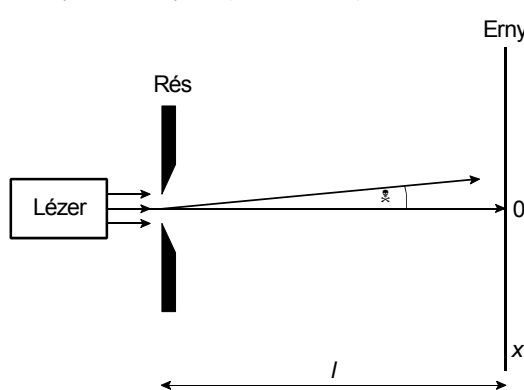
mérete (pl. résszélesség, kör alakú lyuk átmérője, stb.). A laboratóriumi gyakorlat során használt elrendezés ennek a feltételnek minden esetben eleget tesz.

A diffrakció jelenségét leíró összefüggések tartalmazzák ϕ -t, a diffrakció szögét. A *Fraunhofer*-féle kísérletek során a $\sin \phi = x/l$ közelítést alkalmazzuk.

Diffrakció tanulmányozása:

Diffrakció résen:

Monokromatikus síkhullámmal egyenletesen kivilágított d szélességű rés mögött elhelyezett ernyőn (lásd 1. ábra) keletkező elhajlási kép intenzitását az



$$I = I_0 \left(\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 \quad (1)$$

összefüggés írja le, ahol

$$\varepsilon = \frac{\pi d}{\lambda} x. \quad (2)$$

Az intenzitásnak minimuma van az

$$x_k = k \frac{\lambda l}{d} \quad (3)$$

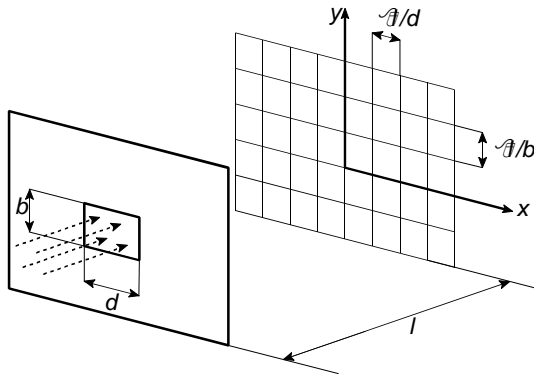
helyeken, ahol k nullától különböző egész szám. A $k = 0$ -nak megfelelő helyen az intenzitásnak maximuma van.

Az alábbi táblázatban megadjuk az első néhány intenzitásmaximum és -minimum helyét és a relatív intenzitásértékeket.

Minimum helye	relatív intenzitás	maximum helye	relatív intenzitás
		$x_{0,\max} = 0$	1
$x_{1,\min} = 1 \cdot \lambda l / d$	0	$x_{1,\max} = 1,5 \cdot \lambda l / d$	0,045
$x_{2,\min} = 2 \cdot \lambda l / d$	0	$x_{2,\max} = 2,5 \cdot \lambda l / d$	0,0162
$x_{3,\min} = 3 \cdot \lambda l / d$	0	$x_{3,\max} = 3,5 \cdot \lambda l / d$	0,0083

Diffrakció téglalap alakú résen:

A diffraktált nyaláb intenzitását két, résen való elhajlás intenzitás-eloszlásának szorzata adja (lásd 2. ábra):

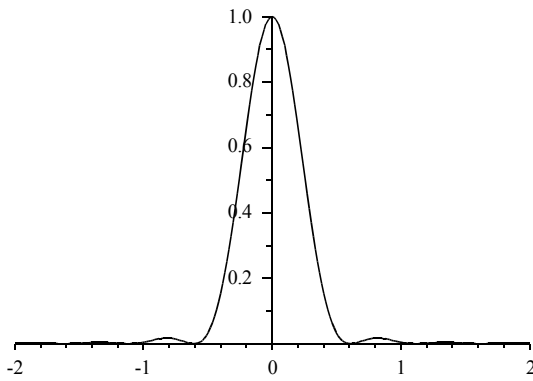


2. ábra

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \frac{\pi dx}{\lambda l}}{\frac{\pi dx}{\lambda l}} \right)^2 \left(\frac{\sin \frac{\pi by}{\lambda l}}{\frac{\pi by}{\lambda l}} \right)^2, \quad (4)$$

ahol d és b a rés vízszintes illetve függőleges mérete. A minimumhelyek mindkét irányban a résnél leírtakhoz hasonlóan számíthatók ki.

Diffrakció kör alakú nyíláson:



3. ábra

Monokromatikus síkhullámmal kivilágított, R sugarú nyílás mögött elhelyezett ernyőn körszimmetrikus, ún. *Airy*-féle elhajlási kép keletkezik. Az intenzitás-eloszlást, amelyet az ún. *Bessel*-függvények írnak le, a 3. ábra szemlélteti.

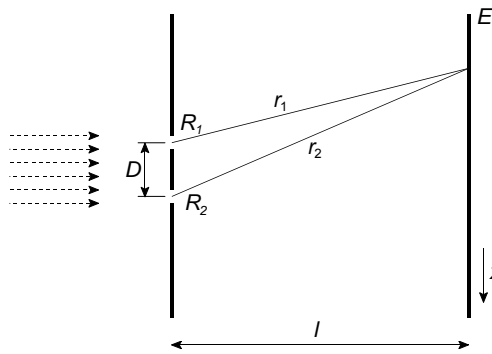
Az alábbi táblázatban megadjuk az első néhány intenzitásmaximumhoz és -minimumhoz tartozó sugár

értékeket és a relatív intenzitásukat:

minimum helye	relatív intenzitás	maximum helye	relatív intenzitás
		$r_{0,max} = 0$	1
$r_{1,min} = 0,61 \cdot \lambda l / R$	0	$r_{1,max} = 0,81 \cdot \lambda l / R$	0,0175
$r_{2,min} = 1,12 \cdot \lambda l / R$	0	$r_{2,max} = 1,33 \cdot \lambda l / R$	0,0042
$r_{3,min} = 1,62 \cdot \lambda l / R$	0	$r_{3,max} = 1,85 \cdot \lambda l / R$	0,0016

Interferencia tanulmányozása:

Young-féle interferencia kísérlet:



A *Young*-féle interferométer két, egymástól D távolságban levő, d átmérőjű R_1, R_2 jelű kör alakú nyílásból áll. Az interferométert párhuzamos lézernyalábbal kivilágítva, az R_1, R_2 nyílásból, a *Huygens*-elv szerint, másodlagos és egymással koherens fénycsövek indulnak ki. A fénycsövek r_1, r_2 út megtétele után az E ernyőn találkoznak és az $r_1 - r_2$ útkülönbség értékétől függően erősítik,

vagy gyengítik egymást (lásd 4. ábra).

Kimutatható, hogy az $r_1 - r_2$ útkülönbség

$$r_1 - r_2 = \frac{D}{l} x, \tag{5}$$

és ezért az E ernyőn

$$\Delta x = \frac{\lambda l}{D} \tag{6}$$

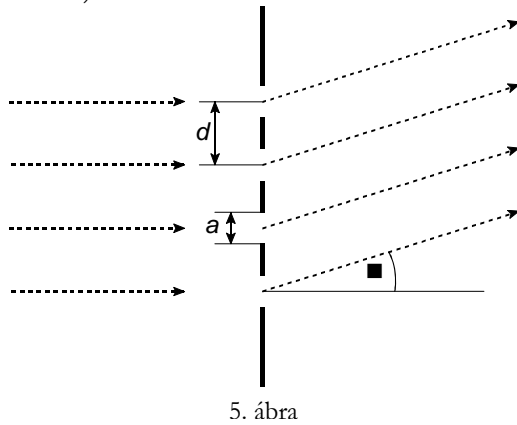
periódusú interferencia csíkok keletkeznek. (A csíkok iránya merőleges az R_1 és R_2 által meghatározott egyenesre.) A *Young*-féle interferométer ernyőjén tehát egy olyan *Airy*-féle elhajlási képet kapunk, amelyben $\lambda l/D$ periódusú interferencia csíkok is vannak.

Interferencia optikai rácson:

Egymással párhuzamos, szabályosan ismétlődő rések rendszerét optikai rácsnak nevezzük. A rácst a d ráczállandóval, az a rácsszélességgel és az N karcolatszámmal szokás jellemezni.

A rács felületére merőlegesen beeső monokromatikus síkhullám hatására a rács résesei a *Huygens*-elv értelmében, koherens hullámforrásként viselkednek. A szomszédos

résekből kiinduló sugarak közötti útkülönbség $d \cdot \sin \varphi$, ahol φ a diffrakció szöge (lásd 5. ábra).



5. ábra

Ennek megfelelően a

$$\sin \varphi_k = k \frac{\lambda}{d} \quad (7)$$

($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) feltételeknek eleget tevő φ_k irányokba diffraktált nyalábok erősítik egymást.

Kimutatható, hogy ha a fény a rácsra nem merőlegesen, hanem Θ szög alatt esik, akkor a d rácsállandójú rács úgy viselkedik, mint egy

$d_{\text{eff}} = d \cdot \cos \Theta$ rácsállandójú merőlegesen kivilágított rács. A fenti állítás akkor érvényes, ha $\lambda/d \ll \cos^2 \Theta$. A gyakorlat során használt rácsra ez a közelítés 1 %-nál kisebb hibával teljesül, ha $\Theta > 70^\circ$.

A rácsra való elhajlás pontosabb tanulmányozása azt mutatja, hogy merőleges beesés esetén az intenzitás az

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \frac{\pi a \sin \varphi}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin \varphi}{\lambda}} \right)^2 \left(\frac{\sin \frac{N \pi d \sin \varphi}{\lambda}}{\sin \frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda}} \right)^2 \quad (8)$$

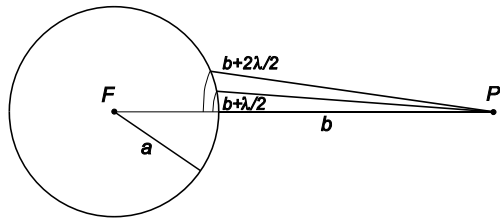
képlettel adható meg. A kifejezés első tényezője az a szélességű rés diffrakciós képének intenzitását, a második pedig N darab, egymástól d távolságban levő koherens fényforrás interferenciáját írja le. A kifejezés vizsgálata alapján megállapíthatjuk, hogy $\sin \varphi_k = k\lambda/d$ szögek esetén a második tényezőnek maximuma van, melynek értéke N^2 . A φ_k szögekhez tartozó maximumokat főmaximumoknak nevezzük. Két szomszédos főmaximum között általában $N-2$ mellékmaximum is található, mivel a $\sin^2(N\pi d \sin \varphi/\lambda)$ -nak ebben a tartományban $N-2$ -szer van maximuma. A mellékmaximumok intenzitása sokkal kisebb, mint a főmaximumoké.

Fresnel-féle elhajlási jelenségek:

Alapjelenségek:

A *Huygens-Fresnel elv*: Egy hullámfelület minden pontja elemi vagy másodlagos gömbhullámok kiindulópontjának tekinthető, és ezeknek az (egymással koherens) elemi hullámoknak az interferenciája szabja meg a tér valamely P pontjában észlelhető fényhatást.

Fresnel-zónák (6. ábra): Tekintsünk egy F pontból kiinduló monokromatikus fényhullámot, és vizsgáljuk meg a P pontban létrejövő fényhatást. Tegyük fel, hogy F -ből a



6. ábra

fény egy a sugarú gömbfelületig (hullámfelületig) jutott. Ekkor ezen gömbfelület pontjai másodlagos fényforrásként viselkedve gömbhullámokat bocsátanak ki. A P pontból gömböket rajzolunk, melyek sugarai rendre b , $b+\lambda/2$, $b+2\lambda/2$... Két szomszédos gömb által az

F körüli, a sugarú gömbből kimetszett gömbfelületek alkotják a *Fresnel-zónákat*. Két szomszédos zónából ellentétes fázisú fénysugárzás jut a P pontba. Egy zónából a P pontba jutó hullámok amplitúdója arányos az adott zóna területével. A fény útjába helyezett akadályok a különböző zónákból kiinduló hullámokat eltakarhatják, megváltoztatva az eredő amplitúdó és fázisviszonyokat a P pontban. Az amplitúdó összegzéseket elvégezve beláthatók a következő állítások:

- Akadálytalan terjedésnél a P pontban a fényhatás olyan, mintha csak az első zóna létesítené feleakkora amplitúdóval. (A többiből induló hullámok kioltják egymást.) Ezért tekinthető az akadálytalan fényterjedés jó közelítéssel egyenes vonalúnak.
- Kis, kör alakú nyílást mozgatva az FP egyenes mentén, a P hely felváltva világos és sötét.
- Kis körlap árnyékának középpontjában mindig világos folt van.
- A *Fresnel-féle zónalemez* (lásd következő pont) gyűjtőlencseként hat.

Fresnel-féle zónalemez fókuszáló tulajdonsága:

Rajzoljunk koncentrikus köröket, amelyek rendre $r, r\sqrt{2}, r\sqrt{3}, \dots, r\sqrt{n}$ sugarúak. Az így kijelölt zónák közül minden másodikat fessük feketére. Ha ezt az ábrát lefényképezzük és előhívjuk, akkor a negatívon ún. *Fresnel*-féle zónalemezt kapunk. Ez egy olyan lencseként viselkedik, amelynek fókusz távolsága: $f_{f0} = r^2/\lambda$ (az ún. főfókusz távolság). Eltérően azonban egy hagyományos lencsétől, a *Fresnel*-féle zónalemeznek több fókusz távolsága is létezik, melyeket a főfókusz távolságból az $f = f_{f0}/n$ képlettel kaphatunk meg, ahol $n = 1, 2, 3 \dots$.

Feladatok:***A mérések megkezdése előtti feladatok:***

- A lézert úgy rögzítse, hogy annak fénysugara párhuzamos legyen az optikai sínnel. A lézer beállításakor vigyázzon a laborban tartózkodó társai szemének épségére! (A lézersugárzás hullámhossza 632,8 nm.)
- A diffraktáló tárgyak rögzítéséhez használja azt a lovaszt, amelyen van vízszintes és függőleges irányú finomállítási lehetőség is.
- Megfigyeléseit úgy végezze, hogy az ernyőt fedje le fehér papírral.
- A kísérletek beállításánál a feladatok szövegében segítséget kap arra nézve, hogy a diffraktáló tárgynak és a lézernek milyen az optimális távolsága. Az ernyőt mindig olyan távolságra tegye, ahol méréseit, megfigyeléseit a legpontosabban végezheti el.
- Az l távolság méréséhez használja fel a 20 cm hosszúságú "letapogatót" is.

Fényelhajlás résen:

- 1) Helyezze a kiadott rést a fénypálya a lézertől 150 cm-re. Az elhajlási képen a 0-ad rendű maximumhoz képest szimmetrikus helyzetű minimumok távolságának mérésével határozza meg a rés szélességét. A mérés pontosságát növelheti, ha a magasabb rendű minimumok nagyobb távolságát méri.
- 2) Hasonlítsa össze a rés szélességének diffrakcióval mért értékét a megadott értékkel.

Fényelhajlás téglalap alakú résen:

- 3) Helyezze a téglalap alakú részt a fényútba a lézertől 60 cm-re. Rajzolja le a megfigyelt elhajlási képet, és az elméleti összefoglalóban található összefüggés alapján határozza meg a rés méreteit.

Fényelhajlás kereszt rácson:

- 4) Helyezze el a kereszt rácst a fényútba a lézertől 100 cm-re. Rajzolja le a megfigyelt elhajlási képet.

Airy-féle elhajlási kép tanulmányozása:

- 5) Helyezze el a fényútba a lézertől 70 cm-re a kiadott korong $106 \mu\text{m}$ sugarú 2. számú kör alakú nyílását. Igazolja, hogy az elhajlási képben megfigyelhető első 3 minimumhoz és maximumhoz tartozó sugarak értéke az $x = A\lambda/R$ kifejezéssel adható meg, ahol

$$0. \text{ max.} \rightarrow A=0,0$$

$$1. \text{ min.} \rightarrow A=0,61$$

$$2. \text{ min.} \rightarrow A=1,12$$

$$3. \text{ min.} \rightarrow A=1,62$$

$$1. \text{ max.} \rightarrow A=0,81$$

$$2. \text{ max.} \rightarrow A=1,33$$

$$3. \text{ max.} \rightarrow A=1,85$$

- 6) Számítsa ki a mért és számolt sugarak relatív eltérését.

Kör alakú nyílás sugarának meghatározása az elhajlási kép alapján:

- 7) Helyezze el a gyakorlatvezető által kiválasztott kör alakú nyílást a fényútba a lézertől adott (az 1. nyílást 70 cm, a 3. és 4-et 30 cm) távolságra. Az előző feladatban megadott A értékek felhasználásával határozza meg a diffrakciós kép alapján a kör alakú nyílás sugarát.

Interferencia Young-féle interferométerrel:

- 8) Helyezze a gyakorlatvezető által kiválasztott interferométert a fényútba, a lézertől adott távolságra (80 cm (8/1) ill. 150 cm (8/2)). Rajzolja le a kapott interferencia-képet.
- 9) Az elméleti összefoglalóban található összefüggés alapján határozza meg a két lyuk távolságát.

Interferencia optikai rácossal:

- 10) Helyezze el a 4 vonal/mm vonalsűrűségű optikai rácsot a fényútba, a nyalábra merőlegesen, a lézertől 50 cm-re (a rács vonalai függőleges helyzetűek legyenek). Forgassa el a rácsot a függőleges tengely körül és figyelje meg, mi történik az elhajlási képpel. Értelmezze a megfigyeléseit.

Fresnel-féle elhajlási alapkísérletek:

- 11) Helyezze el a fényútba a lézertől 100 cm-re a kiadott *élt*, az ernyőt tegye a lézertől 200 cm-re. A rövid fókusztávolságú lencsével vetítse ki az ernyőre az élhez közeli síkokban kialakuló elhajlási képeket, és tanulmányozza azokat. (Tegye a lencsét a tárgy és az ernyő közé; kezdetben az elhajlító tárgyhoz kb. 1,5 cm-re, és keresse meg a lencsének azt a helyzetét, amikor az ernyőn a tárgy éles képét látja. Ezután a lencse tárgytól való távolításával a tárgy mögötti síkok nagyított képét tanulmányozhatja az ernyőn.) Másodszorra tegye az él helyére a *tűt*, majd végül a $d = 1$ mm átmérőjű *kör alakú nyílást*. Mindkét esetben végezze el a fenti megfigyelést, miközben változtatja a lencsének a tárgytól való távolságát. Rajzolja le, milyen képeket figyelt meg az ernyőn, s értelmezze azokat.

Elhajlás Fresnel-féle zónalemezen:

- 12) Helyezze el a lencsét a fényútba, és tegye a *Fresnel-féle zónalemezt* a lencse mögé, attól kb. 60 cm-re. Az ernyőt helyezze kb. 30 cm-rel a zónalemez mögé. A lencse által fókuszált lézerfoltot a zónalemez leképezi az ernyőre. Vizsgálja meg az ernyő mozgatásával ezt a fókuszáló hatást. Azonosítson legalább 3 képet, és a lencsetörvény alapján határozza meg a fókusztávolságokat. (A lencse a lézersugarat kb. 1,5 cm-rel a lencse mögé képezi le.)

Ajánlott irodalom:

📖 Budó Ágoston: Kísérleti fizika III., 277.§, 281. – 283.§

📖 Horváth János: Optika, 194. o.

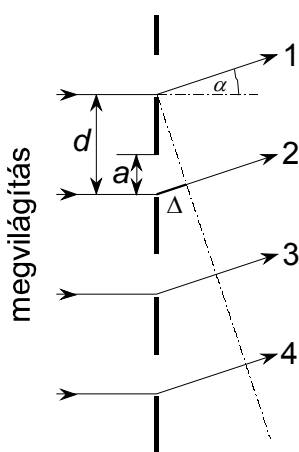
17. Hullámhosszmérés optikai ráccsal és prizmás spektroszkóppal

Célkitűzés:

- Ismerkedés a spektrális bontóelemek működésével.
- Optikai rács rácsállandójának meghatározása ismert hullámhosszúságú fény segítségével.
- Hg-Cd spektrállámpa vonalai hullámhosszának meghatározása a rácsegyenet alkalmazásával, ezek ismeretében prizmás spektroszkóp skálájának hitelesítése.

Elméleti összefoglaló:

A nagyszámú, egyenlő szélességű, egymástól egyenlő távolságban párhuzamosan elhelyezett rések összességét *optikai rács*nak nevezzük. Ha ezek egy síkban helyezked-



1. ábra

nek el, síkrácsról beszélünk. Ez általában csiszolt üveg- vagy fémsík, melyre egymástól egyenlő távolságra párhuzamos barázdákat karcolnak. Ezek megakadályozzák a fény áthaladását (transzmissziós rács esetén) illetve szabályos visszaverődését (reflexiós rács esetén), míg a közöttük lévő érintetlen részek résekként viselkednek. Egy rés és egy barázda együttes d szélességét *rácsállandónak* nevezik (1. ábra). A rácsokat általában az 1mm-re eső karcolatok számával jellemzik. Ez megegyezik a rácsállandó reciprokjával.

A fenti rácsoat monokromatikus (λ hullámhosszú) fényrel merőlegesen megvilágítjuk. Tekintsük most az ún. homológ sugarakat, vagyis jelen esetben azokat a fénysu-

garakat, melyek a rések alsó éleit érintik (ld. 1. ábra). A *Huygens*-elv értelmében minden irányban elhajló sugarak közül vizsgáljuk most azokat, amelyek a rács síkjának normálisával α szöget zárnak be. Két szomszédos résről jövő ilyen sugár a végtelenben akkor erősíti egymást, ha a köztük lévő Δ útkülönbség λ -nak egész számú többszöröse, azaz:

$$\Delta = d \sin \alpha = k\lambda. \quad (1)$$

Ha ez teljesül, akkor egyszersmind bármely nem szomszédos rés alsó éléről kiinduló sugár is erősíti egymást. Ugyanez áll fenn azokra a sugarakra is, amelyek a többi, egymásnak megfelelő réspontokból indulnak ki. A maximális erősítés α_k irányait a

$$d \sin \alpha_k = k\lambda \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2)$$

ún. *rács egyenlet* szabja meg, ahol k az elhajlási rend száma. Mivel összetett fény esetén a különböző hullámhosszak a fenti egyenletnek megfelelően különböző irányban erősítik egymást, ezért a rács a spektroszkópiában bontóelemként használható. Ha kis eltérítési szögekről van szó, a fenti egyenletben szereplő $\sin \alpha_k$ helyett írhatunk α_k -t. Átrendezve az egyenletet:

$$\alpha_k = \frac{k\lambda}{d}. \quad (3)$$

Ebből az alábbi fontos összefüggésekre következtethetünk:

- a k -ad rendű színekép k -szor olyan hosszú, mint az elsőrendű,
- az eltérítés (α) egyenesen arányos a hullámhosszal és fordítottan arányos a rácsállandóval.

Prizmának nevezünk minden olyan, a vizsgált fény hullámhosszán átlátszó testet, amelynek legalább két, egymással szöget bezáró, optikailag sík felülete van. Ezeknek (esetleg csak képzelt) metszéspontja a prizma *törőéle*, egymással bezárt szöge pedig az ún. *törőszög* (ϕ). A *Snellius-Descartes* féle törési törvény értelmében az α_1 beesési és a β_1 törési szög között a következő összefüggés áll fenn:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = n, \quad (4)$$

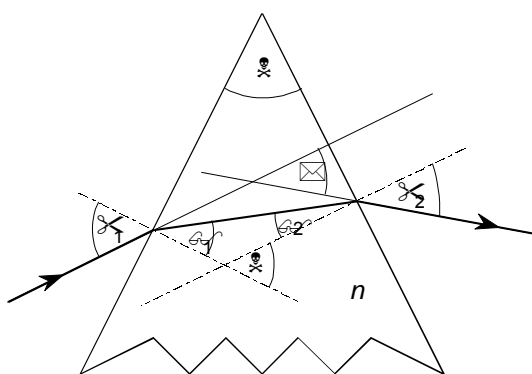
ahol n a prizma levegőre vonatkoztatott törésmutatója.

A prizmán áthaladó nyaláb β_2 beesési szöggel éri el a prizma-levegő határfelületet, kilépésére szintén érvényes a törési egyenlet:

$$\frac{\sin \beta_2}{\sin \alpha_2} = \frac{1}{n} \quad (5)$$

A beeső fénysugár kétszeri törés után a prizmából kilépve, eredeti irányához képest δ szögű eltérést (*deviációt*) szenved (2. ábra):

$$\delta = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - \phi \quad (6)$$

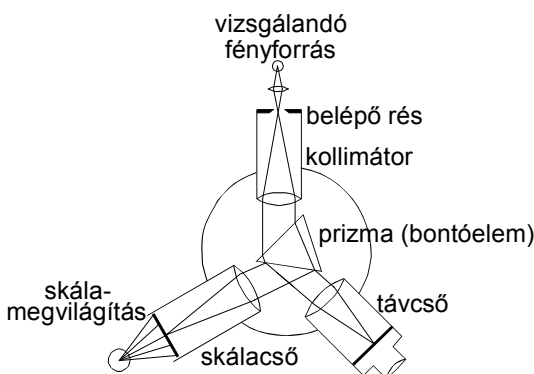


2. ábra

Mivel a törésmutató értéke függ a fény hullámhosszától (*diszperzió*), ezért az eltérés szöge is. Ezt használják ki az ún. *prizmás spektroszkópok*ban is, melyek a spektrumok vizuális vizsgálatára szolgálnak. Ezek egyik egyszerű alaptípusát mutatja a 3. ábra.

Fő részei: prizma, kollimátorcső (benne szabályozható szélességű rés és egy akromatikus – színi hiba mentes – gyűjtőlencse), távcső és egy skálacső.

A vizsgálandó fényforrásból a résre jutó és a gyűjtőlencse által párhuzamosra tett (kollimált) nyalábot a prizma felbontja úgy, hogy



3. ábra

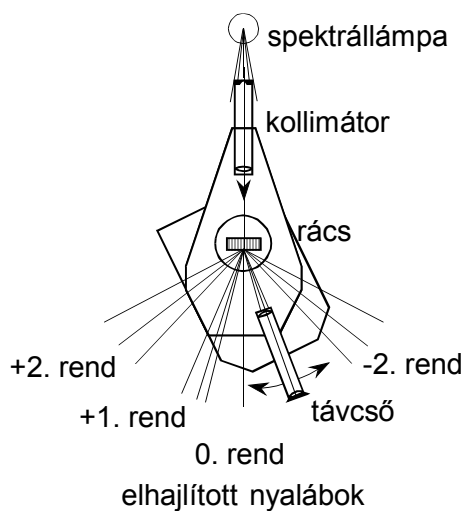
minden hullámhossznak más irányú párhuzamos nyaláb felel meg. Ily módon a távcső objektívjének gyűjtősíkjában létrejön a rés különböző hullámhosszakhoz tartozó képeinek sorozata, azaz a fényforrás spektruma, melyet a távcső okulárjával mint lupével figyelünk meg. Ha a skálacső végén elhelyezkedő átlátszó skálát megvilágítjuk, az ebből kiinduló sugarakat egy lencse párhuzamosítja, a prizma

szemközti lapja a távcsőbe tükrözi, és így a skálának a spektrummal együtt megjelenő képén a spektrumvonalak helyzetét leolvashatjuk.

Kísérleti elrendezés:

Az optikai rácsokkal kapcsolatos méréseket egy goniométer segítségével, az alábbi elrendezés szerint végezzük (4. ábra).

Mind a megfigyelő távcső, mind pedig a rács egymástól függetlenül, de egy közös



4. ábra

függőleges tengely körül forgatható. A rácsot úgy kell beállítani, hogy annak síkja merőleges legyen a kollimátor tengelyére, azaz a résen keresztül haladó fénynyaláb irányára. A távcső mozgásával a vizsgált vonalak könnyen ráállíthatók a benne található szálkeresztre. A rácsállandótól függően magasabb rendű elhajlási képek is megfigyelhetők mindkét irányban. Egy adott beállított vonalhoz tartozó szöveget a távcső alatt elhelyezkedő skálacső fok és perc beosztású skáláján lehet leolvasni.

A mérésnél használandó prizmás spektroszkóp felépítése hasonló az „Elméleti összefoglaló” 3. ábráján bemutatotthoz.

Feladatok:

- 1) Figyelje meg a rögzítő és finomállító csavarok szerepét. Minthogy a bontóelemre párhuzamos nyalábnak kell esnie, ezt úgy érhetjük el, hogy első lépésben a távcsövet végtelenre állítjuk (keressen egy viszonylag távoli tárgyat, s úgy állítsa be a távcsövet, hogy azt élesen lássa), majd a kollimátorcső részének helyzetét kell úgy állítani, hogy a távcsővel a rést élesen lássuk.

- 2) Világítsa meg a kollimátor csövének rését a Zn spektrállámpával és határozza meg két, a gyakorlatvezető által megadott rács rácsállandóját a Zn-lámpa vörös spektrumvonala ismert hullámhosszának ($\lambda_v = 636,23$ nm) és a rácsegyenletnek felhasználásával. Az elhajlás szögét mérje meg első és második rendben mindkét irányban, illetve ha lehetséges még magasabb rendben is.
- 3) A két, most már ismert rácsállandójú rács közül a pontosabb mérést lehetővé tevővel határozza meg a Hg-Cd spektrállámpa vonalainak hullámhosszát.
- 4) Hitelesítse a prizmás spektroszkóp külső skáláját a Hg-Cd lámpa előbb meghatározott hullámhosszúságú vonalainak felhasználásával. Ábrázolja grafikonon a hullámhossz-skálarész hitelesítési görbét.
- 5) Világítsa meg a prizmás spektroszkóp belépő rését egy fehér fényű fényforrással (egy izzólámpával) és az előbbi hitelesítési grafikon alapján határozza meg, milyen hullámhossztartományt lát kék, zöld, sárga, vörös színűnek.

Kérdések:

- Mi a különbség a spektroszkóp, a spektrométer, a spektrográf és a monokromátor között?
- Hasonlítsa össze a rácsos és a prizmás spektroszkópot a velük való hullámhosszmérés bonyolultsága alapján!

Ajánlott irodalom:

📖 Budó Á. - Szalay: Fizikai laboratóriumi gyakorlatok 26. o.

📖 Budó Á. – Mátrai T.: Kísérleti Fizika III., 248.§ 4., 269. §, 283. § 1.2.,

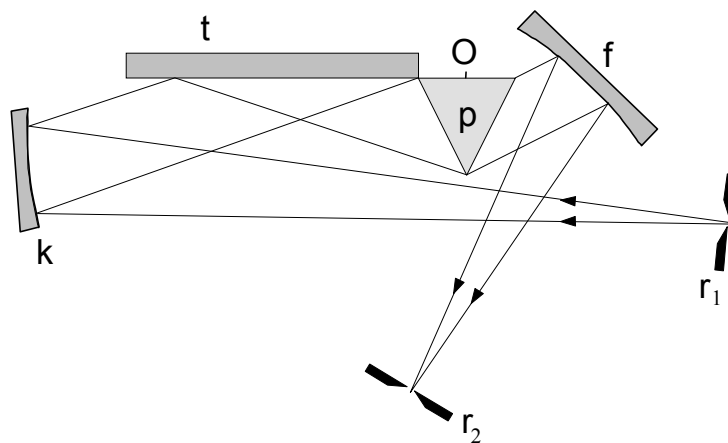
18. A Rydberg-állandó meghatározása

Célkitűzés:

- Spektroszkópiai mérések gyakorlása
- A hibaterjedés tanulmányozása

Elméleti összefoglaló:

A kísérleti spektroszkópia feladata valamely fénynyalámban a fényintenzitás hullámhossz szerinti eloszlásának, azaz spektrumának a meghatározása. A gyakorlat során megismerkedünk a spektrum meghatározására használt berendezés hullámhossz szerinti hitelesítésével, felhasználva a Hg-Cd és He spektrálművek által kibocsátott spektrumvonalak hullámhosszát.



1.ábra

A méréseket egy Zeiss gyártmányú SPM-1 típusú (tükrös) monokromátorból kialakított spektroszkóppal végezzük. Az SPM-1 monokromátor, amelynek elvi felépítését az 1. ábra mutatja, egy állandó eltérítésű prizmat tartalmazó készülék. A belépő és a

kilépő fény terjedési iránya közötti szög a kiválasztott hullámhossztól függetlenül 122° . A monokromátorból kilépő fény hullámhosszának változtatása az egymáshoz rögzített síktükörnek (t) és prizmának (p) az O ponton keresztülhaladó, a kép síkjára merőleges tengely körüli forgatásával történik. A tükör–prizma kombináció alkalmazásának eredményeként a kiválasztott hullámhosszú fénynyaláb mindig szimmetrikusan halad át a prizmán. A belépő résen (r_1) átmenő fény párhuzamosítását és a bontott fény leképezését a kilépő résre (r_2) a kollimátor- és fókuszálótükrök (k, f) végzik. A tükröket alkalmazó készülékekben nem lép fel az ún. színi hiba, amely a lencsével történő leképezések tipikus kísérője. Ez és a prizmák cserélhetősége - lásd az alábbi táblázatot - eredményezi, hogy az SPM-1 monokromátor egyaránt alkalmazható az ultraibolya, a látható és az infravörös spektrumtartományban. A leképező tükrök fókusz távolsága 35 cm, nyílászviszonya: $d/f = 1:6.7$, ahol d a tükör átmérője, f a fókusz távolsága.

A gyakorlaton használt készülék spektroszkóppá alakítása oly módon történt, hogy a kilépőrést eltávolítottuk, és egy okulárlencsével figyeljük meg az eredeti réssíkot.

Az SPM-1 monokromátorban alkalmazható prizmák:

Anyaga	törőszöge	működési tartomány (μm)
kvarc	$67^\circ 33'$	0,2-0,36
NaCl	56°	0,21-0,36
flintüveg	60°	0,36-1,2*
LiF	82°	1,2-5,7
NaCl	67°	5,7-16
KBr	67°	16-25
KRS 5	28°	25-40

* A gyakorlat során ilyenet használunk.

A hidrogénatom emissziós spektruma:

A hidrogénatom spektruma a látható tartományban négy vonalból áll ($H_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$), amelyekhez az ultraibolyában további, fokozatosan sűrűsödő és csökkenő intenzitású vonalak csatlakoznak. Egy hidrogéngázt tartalmazó csőben az elektromos kisüléskor a

H₂-molekulák nagy része H-atomokra bomlik, és ezek közül sok az elektronokkal való ütközések során az $n = 2, 3, 4, \dots$ kvantumszámokkal jellemzett gerjesztett állapotokba kerül. A *Bohr*-féle atomelmélet szerint a hidrogénatom n és k ($k < n$) főkvantumszámú állapotai közötti átmenetkor kibocsátott fény hullámhossza ($\bar{\nu}$) az alábbi egyenlettel adható meg:

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3 c} \left\{ \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right\}, \quad (1)$$

ahol m az elektron tömege, e a töltése, h a *Planck*-állandó és c a vákuumbeli fénysebesség.

Ha a gerjesztett hidrogénatomok a $k = 1$ állapotba térnek vissza, akkor ennek során az alábbi, ún. *Lyman*-sorozatnak megfelelő hullámhosszúságú vonalakat bocsátják ki:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left\{ \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right\}, \text{ ahol } k = 1, n = 2, 3, 4, \dots \quad (2)$$

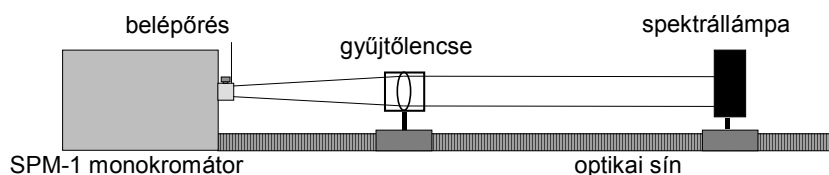
R_H a hidrogénatomra vonatkozó *Rydberg-állandó*, melynek értéke:

$$R_H = 109677,58 \text{ cm}^{-1}.$$

A *Balmer-sorozat* úgy jön létre, hogy az $n = 3, 4, 5, \dots$ gerjesztett állapotokban lévő atomok a $k = 2$ állapotba mennek át, azaz a fenti összefüggés annyiban módosul, hogy $k = 2$ és $n = 3, 4, 5, \dots$ értékekkel kell számolni. Amennyiben $k = 3, n = 4, 5, 6, \dots$, úgy a *Paschen*-, $k = 4, n = 5, 6, 7, \dots$ esetén a *Brackett*- és $k = 5, n = 6, 7, 8, \dots$ értékek-nél pedig a *Pfund*-sorozatról beszélünk.

Kísérleti elrendezés:

A mérések során az alábbi elrendezést használjuk: egy optikai sínre helyezük a vizsgálandó spektrállámpát, melynek fényét egy gyűjtőlencsével fókuszáljuk a monokromátor belépő részére (2. ábra). Erre azért van szükség, hogy a rés megvilágítása, a spektrumok fényereje nagyobb legyen.



2. ábra

A Hg-Cd, illetve He spektrállámpák következő hullámhosszú vonalaival kell a spektroszkópot hitelesíteni. A könnyebb azonosíthatóság érdekében a *Mellékletben* megadott táblázat a Hg-Cd lámpa relatív intenzitásait is tartalmazza.

Hg-Cd spektrállámpa vonalai:

λ (nm)	643,85	579,00	576,96	546,07	508,58	491,61	479,99	467,81	435,83	407,80	404,66
----------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

He spektrállámpa vonalai:

λ (nm)	706,52	667,82	587,57	501,57	492,19	471,32	447,15
----------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Feladatok:

- 1) A gyakorlatvezető jelenlétében tekintse meg a monokromátor belső felépítését.
- 2) A kiadott Hg-Cd és He spektrállámpák ismert hullámhosszú vonalainak segítségével hitelesítse az SPM-1 monokromátorból kialakított spektroszkóp dobbeosztását. A skálaértékek leolvasását tized skálárész pontossággal végezze. A spektrállámpák bekapcsolásához és cseréjéhez kérje a gyakorlatvezető segítségét.
- 3) Készítse el a spektroszkóp hitelesítési görbét, azaz ábrázolja a skálaértékeket a hullámhosszak függvényében.
- 4) A leolvasás pontosságát és reprodukálhatóságát megfigyelve, a hitelesítési görbe alapján állapítsa meg a spektroszkóppal történő hullámhosszmérés pontosságát a $\lambda=430, 490$ és 660 nm körüli hullámhossztartományban.
- 5) Határozza meg a hidrogénlámpa H_α , H_β és H_γ (vörös, kék, ibolya) vonalainak hullámhosszát. A mért skálárész értékekből a hullámhossz meghatározását a hitelesítési görbe alapján végezze el.
- 6) Számítsa ki a *Rydberg-állandó*t a *Balmer-formula* alapján. Adja meg a *Rydberg-állandó* meghatározott értékei átlagának az irodalmi értéktől való relatív eltérését.

A hibaterjedés segítségével adja meg az egyes spektrumvonalak esetére kiszámított Rydberg-állandó (R_α , R_β , R_γ) relatív hibáját.

Ajánlott irodalom:

📖 Budó Á. – Mátrai T.: Kísérleti fizika III., 269.§, 332.§

📖 Mátrai T. - Csillag L.: Kísérleti spektroszkópia, 111-122. o., 193-195. o.

19. Szilícium fényelem vizsgálata

Célkitűzés:

- Félvezetőben lejátszódó fényelektromos jelenség vizsgálata; rövidzárási áram mérése.

Elméleti összefoglaló:

A fényelemek a *belső fényelektromos hatáson* alapuló sugárzásmérő és elektromos energiatermelő eszközök. A szilícium fényelem lényegében egy **n** típusúra szennyezett szilícium kristálylapka, amelynek egyik oldalán a felületi réteget **p** típusúra szennyezték. Ennek következtében ezen az oldalon egy **pn** átmenet alakul ki.

Amikor a záróréteget megfelelő energiájú fotonok érik, akkor elektron-lyuk párok keletkeznek. A zárórétegben fennálló elektromos tér hatására az elektronok az **n**, a lyukak a **p** típusú részbe mennek át, azaz a két rész között forrásfeszültség alakul ki. Ezen feszültség nagysága szokásos megvilágítási értékek mellett egy BP-100 jelű fényelemre 200-300 mV.

A fényelemek érzékenysége függ a fény hullámhosszától (azaz a foton energiájától). A Si fényelemek az egész látható tartományban érzékenyek, érzékenységi maximumuk kb. 850 nm-nél van. Az érzékenység a rövidebb és a hosszabb hullámhosszak felé monoton csökken, és kb. 400, illetve 1050 nm-nél már a maximális érték 5%-ára esik le.

A fényelem rövidzárási árama a *megvilágítással* (lásd a fotometriánál) arányos:

$$I = C \cdot E_v, \quad (1)$$

ahol E_v a *megvilágítás*, C egy konstans. Pontszerű, I_v *fényerősségű* fényforrás által megvilágított, r távolságban lévő fényelemben létrehozott rövidzárási áram:

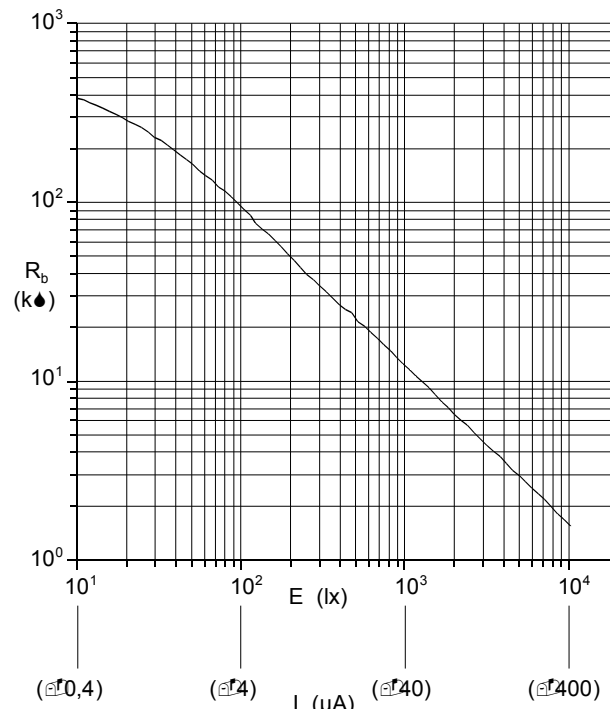
$$I = C \cdot I_v \cdot \frac{\cos(i)}{r^2}, \quad (2)$$

ahol i a fényelem normálisa és a fényelemtől a fényforrás felé mutató irány által bezárt szög.

A fényelemek olyan áramforrásoknak tekinthetők, amelyeknek a belső ellenállása függ az áramerősségtől, illetve a megvilágítástól. Mivel egy áramforrásból akkor vehető ki maximális teljesítmény, ha a terhelő ellenállás ugyanakkora, mint az áramforrás belső ellenállása, ezért más-más megvilágítási értékhez más-más értékű optimális terhelő ellenállás tartozik.

A BP-100 jelű Si fényelemre vonatkozóan a belső ellenállás (vagyis az optimális terhelő ellenállás) értékei a megvilágítás (illetve a rövidzárási áramerősség) függvényében az 1. ábrán láthatók. (A fényelemek forrásfeszültsége a 0 – 100 °C hőmérsékleti tartományban lineárisan csökken a hőmérséklet növekedésével.)

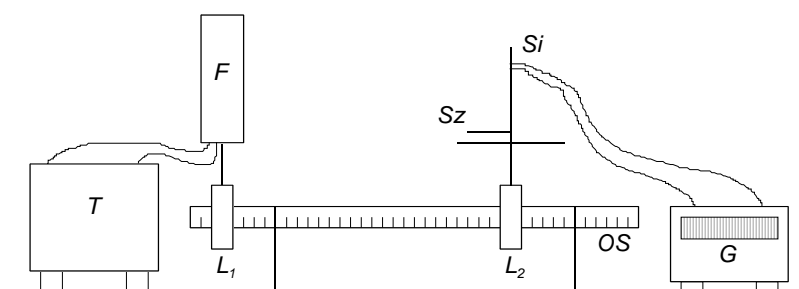
Siemens BP 100 fényelem optimális illesztő-ellenállása
(Kétszer logaritmikus ábrázolás)



1. ábra

Kísérleti elrendezés:

A gyakorlaton végzendő vizsgálatokhoz a 2. ábrán látható elrendezést használjuk. Ebben T egy kb. 100 W teljesítményű transzformátor, F egy 12 V-ról működő halogénlámpa, Si a fényelem, Sz egy szögmérő, OS az optikai sín, G egy galvanométer.



2. ábra

A valóságban mindig csak közelítjük a pontszerű fényforrás esetét. Kísérleteink során itt halogén izzót alkalmazunk. A benne lévő izzószál egy henger mentén feltekert spirál. Az izzót úgy helyezzük el, hogy a henger *alapköre* nézzen a fényelem felé, azaz a henger tengelye párhuzamos legyen az elrendezést hordozó optikai sínnel (OS). Ekkor megfelelő távolságból az izzólámpát pontszerű fényforrásnak tekinthetjük. Az L_1, L_2 lovasszárak tartják a fényforrást és a fényelemet. A fényelem rövidzárási áramát a G galvanométerrel mérjük.

Az elrendezés összeállításánál a következőkre kell ügyelni:

- A fényforrás izzószálának tengelye párhuzamos legyen a sínnel és pontosan fölötte legyen.
- A fényelem síkjának normálisa pontosan a fényforrás felé mutat ha a fényelemről visszaverődő fény az izzószál irányában van.
- A fényelem is pontosan a sín felett legyen.
- A galvanométer nagyon érzékeny műszer, különös gonddal kell vigyázni rá!

Feladatok:

- 1) Az irodalom alapján tanulmányozza a fotometria alapjait! (Fényerősség, fénysűrűség, intenzitás, megvilágítás.) Az elméleti összefoglaló alapján milyen méréssel tudná igazolni a fényelemnek, mint detektornak (megvilágításmérőnek) a linearitását?
- 2) Jegyezze fel a galvanométer feltüntetett adatait.
- 3) Rögzített fényelem – izzószál távolság esetén mérje meg a rövidzárási áramerősséget a fényelem normálisa és az optikai tengely által bezárt i szög függvényében. A fényelem-izzószál távolságot úgy állítsa be, hogy a galvanométer kitérése 90-100 skálarész legyen $i = 0^\circ$ esetén. A távolság megválasztásánál ügyeljen arra, hogy a műszer belső ellenállása elhanyagolható legyen a fényelem belső ellenállásához viszonyítva. Válassza ki ennek alapján a megfelelő méréshatárt. Vizsgálja meg, hogy a 2. és a 3. méréshatár választása esetén hogyan teljesül a fenti feltétel. A becsléshez használja az 1. ábrát.
A mérés menete: 10° -onként mérjen. Az i értékei legyenek negatívak, ha a fényelemet a fényforrástól balra forgatja, és pozitívak, ha jobbra. Minden 0° és $\pm 90^\circ$ közötti méréssorozat után ellenőrizze, hogy $i=0^\circ$ -nál maximális maradt-e a galvanométer kitérése. Öt méréssorozat átlagát vegye.
- 4) Az előző feladat táblázata alapján rajzolja meg a fényelem *iránykarakterisztikáját*: polárkoordinátákban az i szög függvényében ábrázolja a normált rövidzárási áramot, azaz $I(i)/I(0)$ -t! (Útmutatást és polárdiagramot kérjen a gyakorlatvezetőtől.)
- 5) Linearizálással ellenőrizze a koszinusztörvényt, azaz ábrázolja (derékszögű koordináta-rendszerben) az $I(i)/I(0)$ -t az i szög koszinuszának függvényében.
- 6) A galvanométer 3. méréshatáránál állítsa be úgy a fényelem és fényforrás távolságát, hogy a galvanométer kitérése $i = 0^\circ$ esetén 90-100 skálarész legyen. Ezután kb. 10 különböző távolságnál mérje meg a rövidzárási áramot. (A legnagyobb távolság esetén a galvanométer kitérése ne legyen kisebb 10 skálarésznél.) Három méréssorozatot átlagoljon.

- 7) Az előző feladat táblázata alapján *linearizálva* ábrázolja a távolság – rövidzárási áram összefüggést. Mivel a fényelem és a fényforrás távolságát csak egy konstans erejéig ismerjük, így célszerű a távolságot a két lovas széléitől mérni. Ekkor a mérésekben az r távolság helyett az $r' = r - \alpha$ távolság fog szerepelni, ahol r a valódi fényelem-fényforrás távolság, r' a két lovas szélétől mért érték, α egy konstans.
- 8) A linearizálás segítségével határozza meg az α értékét. A fényelemmel kapcsolatban milyen következtetés vonható le a görbe alakjából?
- 9) Becsülje meg, mekkora hibát okoz a galvanométer belső ellenállásának elhanyagolása a 3. méréshatáron való mérés esetén. Használja az $U/I = R_b + R_k$ összefüggést. (Jelen esetben a galvanométer a külső ellenállás és a fényelem, mint áramforrás rendelkezik belső ellenállással. Ennél a képletnél az I áramerősséget jelent, nem fényintenzitást.)

Ajánlott irodalom:

- 📖 Budó Ágoston: Kísérleti fizika III., 270.§, 313.§
- 📖 Mátrai T. - Csillag L.: Kísérleti spektroszkópia

20. Optikai szál numerikus apertúrájának meghatározása

Célkitűzés:

- Ismerkedés az optikai szálakkal
- Optikai szál numerikus apertúrájának meghatározása

Elméleti összefoglaló:

Az optikai szálak, azaz fényvezető szálak nagy törésmutatójú, átlátszó anyagból készült, hajlítható huzalok, amelyeknek vastagsága alkalmazástól függően a néhány mikrométerestől a milliméteres-tartományig változik, tipikus méretük a hajszál vastagságával egyezik meg: kb. 100 mikrométer. Az egyik véglapjukon belépő fénysugár a sorozatos teljes visszaverődések következtében a huzal meghajlított állapotában is csak a másik véglapon lép ki. A szál nem homogén eloszlású, hanem bizonyos törésmutató profillal rendelkezik. A szál belseje, azaz magja mindig nagyobb törésmutatójú, mint az azt burkoló köpeny. Ez okozza azt, hogy a szálban haladó fény a mag-köpeny határfelületen teljes visszaverődést szenved, így a szál képes a fényt a tengelye mentén vezetni. A köpenynek azon a funkción kívül, hogy optikailag ritkább felületet jelent, az is szerepe, hogy fizikailag és mechanikailag védelmet nyújt a mag és benne továbbított információ számára.

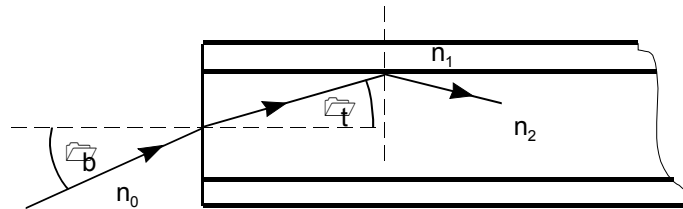
A szál jellemző tulajdonsága, egyben egyik értékmérője a szál numerikus apertúrája (NA). Minél nagyobb a szál numerikus apertúrája, annál nagyobb határfokkal valósítható meg a szál fényforráshoz való csatolása. Ha a mag keresztmetszetével egyenlő sugárzási felületű fényforrást közvetlenül illesztünk az optikai szálhoz, akkor a csatolás határfoka (η), azaz a szálban terjedő teljesítmény és a fényforrás által kisugárzott teljesítmény hányadosa az alábbi képlettel adható meg:

$$\eta = (NA)^2 / 2. \quad (1)$$

A numerikus apertúra definíció szerint annak a legnagyobb beesési szögnek ($\Theta_{b\max}$) a szinuszával arányos, amely szöggel a véglapra beeső fénysugár az egyenes szálban teljes visszaverődések útján még átjut. Ha az optikai szál környezetének törésmutatója n_0 , (lásd 1. ábra), akkor az

$$NA = n_0 \sin \Theta_{b\max} \quad (2)$$

mennyiséget a szál numerikus apertúrájának nevezzük. Az ábrán alkalmazott jelölések: n_1 a köpeny, n_2 a mag törésmutatója, Θ_b jelöli a beesési szöget, Θ_i pedig a törési szöget.



1. ábra

Egyszerű geometriai megfontolással, felhasználva a *Snellius-Descartes* törvényt belátható, hogy a numerikus apertúrát a szál anyagának törésmutatója, pontosabban a köpeny és a mag törésmutatója határozza meg az alábbi összefüggés szerint, ahol n_2 a mag, n_1 pedig a köpeny törésmutatója:

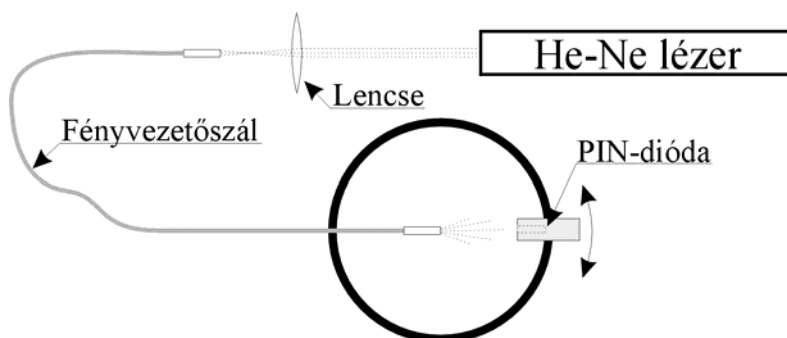
$$NA = n_0 \sin \Theta_{b\max} = n_2 \sin \Theta_i = n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2} = \sqrt{n_2^2 - n_1^2}. \quad (3)$$

Az összefüggésből látható, hogy a numerikus apertúra kedvezően akkor nagy, ha nagy a különbség a szál magjának és köpenyének törésmutatója között.

Ha nem ismerjük a szál anyagának törésmutatóját, akkor a numerikus apertúrát kísérleti úton a következőképpen tudjuk meghatározni: Megmérjük az optikai szálon átjutó fény (kimenő jel) síkbeli intenzitásának szög szerinti eloszlását, és megmérjük a kimenő jel azon szélességét, ahol az körülbelül az $1/e$ részére csökken. Ennek felével azonosítjuk első közelítésben a $\Theta_{b\max}$ -ot.

Mérés leírása és a kísérleti elrendezés:

A két végén gondosan csiszolt optikai szálba hélium-neon lézer (hullámhossza: $\lambda = 632,8 \text{ nm}$) fényét csatoljuk (lásd a 2. ábrát). A másik végével szemben, attól adott távolságban (kb. 15 cm), körív mentén elmozdíthatóan PIN diódát helyezünk el. Ennek érzékelő felülete a fényvezetőszál irányába néz. A fotodióda jelét erősítővel növeljük meg. Az erősítő kimenő jelét, a feszültségét egy digitális multiméterrel mérjük. A dióda kimenő jelének maximalizálásával optimalizálható a szálba való becsatolás. A kapott jel – a fotodióda linearitása miatt – arányos a szálból kilépő intenzitással.



A fotodiódát körív mentén 5° -onként mozgatva megmérjük a jelét, azaz az erősítőhöz csatlakozó digitális multiméter által mutatott feszültséget.

Felvesszük a háttér-jelet, azaz azt a jelet, amit a lézer kikapcsolt állapotában a digitális multiméter mutat és ezzel korrigáljuk méréseinket.

A fotodióda helyét a goniométer szögosztásával azonosíthatjuk.

Feladatok:

- 1) Vizsgálja meg a kísérleti elrendezést és a kiadott optikai szálakat.
- 2) Fókuszálja a He-Ne lézer fénynyalábját a kísérleti elrendezésben levő optikai szálba. Mérje meg a kiadott műszerrel a dióda jelét. Csak helyi megvilágítást használjon, hogy a háttérfény minél kisebb legyen. A mérést úgy végezze el, hogy a

PIN-diódát körív mentén mindkét irányba, 5° -onként elmozgatja 70° -os tartományban. Méréseit háromszor ismétlje meg. Eredményeit foglalja táblázatba.

- 3) Vegye fel a háttérjelet. Itt is háromszor mérjen.
- 4) Ábrázolja grafikonon a háttérjelet, a hasznos jelet, majd a háttérjellel korrigált hasznos jelet a szög függvényében.
- 5) Határozza meg az utóbbi grafikon alapján a numerikus apertúrát.
- 6) Számolja ki a numerikus apertúra értékének birtokában az alkalmazott szál becsatolási hatásfokát.
- 7) Számítsa ki, mekkora relatív különbség van a mag és a köpeny törésmutatója között, ha a mag törésmutatója 1,48.

Kérdések:

- A 6. feladatban számolt csatolási hatásfoknak milyen kapcsolata van a konkrét elrendezés átviteli hatásfokával, amely utóbbi a szálból kilépő teljesítménynek és a He-Ne lézer teljesítményének hányadosa.

Ajánlott irodalom:

- 📖 Richter Péter: Bevezetés a modern optikába III. kötet 9.3. fejezet, Optikai adatátvitel
- 📖 Hoves-Morgan: Fénytvközlés 5. fejezet, Fényvezető szálak és kábelek
- 📖 Guenter: Modern Optics 148-158. p.
- 📖 Michael Bass: Handbook of Optics, Chapter 10

21. Ellenállásmérés Ohm törvénye alapján és Wheatstone-híddal

Célkitűzés:

- Az *Ohm*-törvény alkalmazása egyszerű esetekben.
- Alapvető elektromos mérőberendezések (áramerősség- és feszültségmérő) használatának elsajátítása.
- A mérési eredményeket befolyásoló, a műszerek belső ellenállása által okozott rendszeres hibák vizsgálata.
- Ellenállásmérés a *Wheatstone*-híd alkalmazásán alapuló null-módszerrel.

Elméleti összefoglaló:

A legegyszerűbb elektromos áramkör egy feszültségforrásból és egy - a feszültségforrás pólusait összekötő - vezetékből áll. Az áramkör zárása esetében a feszültségforrás (pl. elem) pólusai közötti U potenciálkülönbség hatására az l hosszúságú vezetékben E térerősségű elektromos mező jön létre:

$$U = E \cdot l, [U] = 1V. \quad (1)$$

Ezen elektromos mezőben töltéshordozók áramlanak, amelyek rendezett mozgása az I áramerősséggel jellemezhető. Ha a vezető f keresztmetszetén időegység alatt Q töltésmennyiség halad át, az áramerősség:

$$I = \frac{dQ}{dt}, [I] = 1 \frac{C}{s} = 1A. \quad (2)$$

Az áramerősség egyenáram esetében időben állandó.

Az áramerősség mérésére az áram különböző (többnyire mágneses) hatásán alapuló műszerek: galvanométerek és ampermérők szolgálnak, amelyeket a mérendő áramot a fogyasztóhoz vivő vezetékbe, azaz a fogyasztóval sorosan kell kapcsolni. A

feszültség mérésére szolgáló elektrométereket és voltmérőket a fogyasztó pólusaihoz, a fogyasztóval párhuzamosan kell kapcsolni.

Ohm törvénye (1827) szerint egy homogén vezetőszakaszban folyó áram erőssége - a hőmérséklet állandósága esetén - arányos a vezetőszakasz két vége között fennálló potenciálkülönbséggel:

$$I = \frac{U}{R}, \quad (3)$$

ahol R a vezetőszakasz elektromos ellenállása,

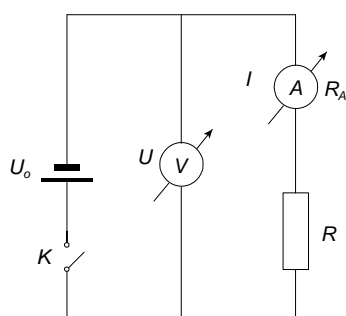
$$[R] = 1 \frac{V}{A} = 1 \Omega. \quad (4)$$

Lineáris vezető ellenállása az $R = \rho l / f$ összefüggéssel adható meg, ahol ρ az anyagi minőségre jellemző fajlagos ellenállás, $[\rho] = 1 \Omega m$. A vezető a $\sigma = 1/\rho$ fajlagos vezetőképességgel is jellemezhető, $[\sigma] = 1 \Omega^{-1} m^{-1}$.

Fémes vezetők ellenállása az áramló szabadelektronoknak a fémionokkal való ütközéséből származik és a hőmérséklettel növekszik. Alapvetően különböző sajátosságokat mutatnak azonban például a félvezetők: ezen anyagok ellenállása feszültségfüggő, és a hőmérséklettel csökken.

Mérések menete:

Ellenállás meghatározása az áramerősség és a feszültség mérésével:



1. ábra

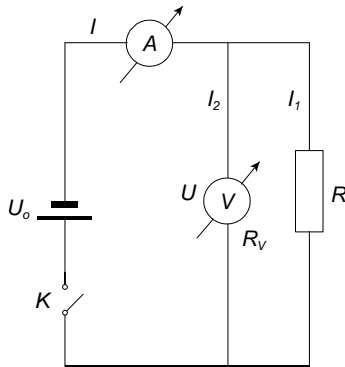
Ohm törvénye alapján a feszültség és az áramerősség mérésével az ellenállás értéke meghatározható. A mérés során két elektromos kapcsolás választható. Az első összeállításban az áramerősség-mérő belső ellenállását, a második kapcsolásban pedig a feszültségmérő belső ellenállását szükséges figyelembe venni a mérési eredmények kiértékelésekor.

1. Az R_A belső ellenállású A ampermérőt a mérendő R ellenállással sorba kapcsoljuk az 1. ábrán

látható módon, és mindkettőt áthidalja a V voltmérő. Az ampermérő az R ellenálláson ténylegesen átfolyó I áramot mutatja, míg a voltmérő az ellenálláson és az ampermérőn együtt létrejövő feszültségesést méri. Így $U = IR + IR_A$, amelyből a mérendő ellenállás:

$$R = \frac{U}{I} - R_A. \quad (5)$$

2. Az A ampermérőt és az ismeretlen R ellenállást most is sorba kötjük, a V voltmérő azonban, a 2. ábrán látható módon, csak az R ellenálláson eső feszültséget méri. Az ampermérő által mutatott I áramerősség most az ellenálláson átfolyó I_1 és a voltmérőn átfolyó I_2 áram összegével egyenlő: $I = I_1 + I_2$. Ha a voltmérő ellenállását R_V - vel jelöljük:



2. ábra

és

$$I_1 = \frac{U}{R} \quad (6)$$

$$I_2 = \frac{U}{R_V}. \quad (7)$$

A főágban folyó áram erőssége:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R} + \frac{U}{R_V}, \quad (8)$$

amely összefüggésből az ismeretlen ellenállás értéke az alábbi módon számítható:

$$R = \frac{U}{I - \frac{U}{R_V}}. \quad (9)$$

Műszerek méréshatárának kiterjesztése:

Az áramerősség és feszültség mérésére szolgáló műszerek méréshatára a műszerekhez megfelelően kapcsolt segédellenállásokkal növelhető. Ezen ellenállások szerepe az, hogy csökkentsék az ampermérőn átfolyó áram erősségét, valamint a voltmérőn

eső feszültséget. A méréshatár „ n ” - szeresére növelhető áramerősség mérésnél a műszerrel párhuzamosan kapcsolt

$$R_s = \frac{R_A}{n-1} \quad (10)$$

sönt-ellenállás, feszültségmérésnél a műszerrel sorosan kapcsolt

$$R_e = (n-1)R_V \quad (11)$$

előtét-ellenállás alkalmazásával. Az ún. kombinált (UNIVO, GANZUNIV 3, METEX 2) műszerek az áramerősség és feszültség mérésére egyaránt alkalmasak az áramkörbe a mérés céljának megfelelően bekapcsolva. Ezen műszerek beépített, változtatható sönt- és előtét-ellenállásokat tartalmaznak, melyek a méréshatár beállításakor választódnak ki.

Ellenállásmérés Wheatstone-féle hídmódszerrel:

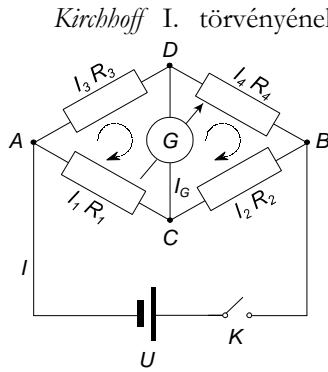
Stacionárius árammal átjárt, csomópontokat és hurkokat tartalmazó áramkörök egyes ágaiban folyó áramok és az ágakban létrejövő feszültségesések *Kirchhoff* áram-elágazási törvényei alapján adhatóak meg. *Kirchhoff* I. törvénye szerint az áramkör csomópontjaiban a befolyó áramok erősségének összege egyenlő a kilépő áramok erősségének összegével. Az áramerősségeket az áramirányoknak megfelelően előjelezve:

$$\sum_k I_k = 0. \quad (12)$$

Kirchhoff II. törvénye szerint stacionárius árammal átjárt áramkörben az ellenállásokon eső $I_k R_k$ feszültségesések összege bármely zárt hurokban megegyezik az adott hurokban ható ε_k elektromotoros erők összegével. Az I_k és ε_k irányított mennyiségeket a választott körüljárási iránytól függő előjellel ellátva:

$$\sum_k I_k R_k = \sum_k \varepsilon_k. \quad (13)$$

A 3. ábra a *Wheatstone*-híd elvi kapcsolási rajzát tünteti fel. Az U feszültségforrást tartalmazó áramkör főágában I erősségű áram folyik. Az áramkör az A és B , valamint a C és D pontokban elágazik. Az R_1, R_2, R_3, R_4 ellenállások megfelelő választásával a híd egyensúlyba hozható, azaz elérhető, hogy a C és D pontok azonos potenciálon legyenek, amely esetben a G galvanométeren át nem folyik áram: $I_G = 0$.



3. ábra

Kirchhoff I. törvényének a C és D elágazási pontokra való alkalmazásából következik, hogy

$$I_1 = I_2 \text{ és } I_3 = I_4 \quad (14)$$

Kirchhoff II. törvényét az ADC valamint a BCD hurkokra a híd egyensúlya esetében alkalmazva:

$$I_1 R_1 - I_3 R_3 = 0 \quad (15)$$

és

$$I_2 R_2 - I_4 R_4 = 0. \quad (16)$$

A fenti egyenletek rendezése után, a megfelelő áramok egyenlőségének figyelembe vételével adódik:

$$\frac{R_3}{R_4} = \frac{R_1}{R_2}. \quad (17)$$

Legyen R_3 az ismeretlen ellenállás, az R_4 pedig ismert, változtatható ellenállás. Adott R_1 és R_2 ellenállások esetén az R_4 értékének változtatásával beállítható a híd egyensúlya, amely $I_G = 0$ feltétel teljesülésével ellenőrizhető. Az egyensúlyi helyzet eléréséhez szükséges ellenállások ismeretében R_3 értéke meghatározható:

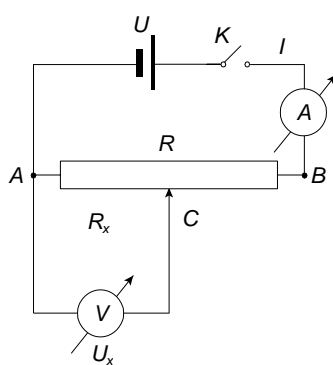
$$R_3 = R_4 \frac{R_1}{R_2}. \quad (18)$$

A feszültség szabályozására használható elektromos kapcsolás:

Egyenáramú *feszültségosztót*, potenciométert akkor alkalmazunk, ha a rendelkezésünkre álló feszültségforrásnál kisebb feszültségre van szükségünk. A potenciométerről változtatható helyzetű csúszókontaktus segítségével vesszük le a feszültséget. Léteznek forgó- és toló-potenciométerek, amelyekben szén vagy fém ellenállásanyag körgyűrű illetve henger alakú szigetelőtestre van csévélve.

Tolóellenállást a 4. ábrán látható kapcsolás szerint alkalmazhatunk potenciométerként: az U feszültségforrást az A ampermérőn és a K kapcsolón keresztül a tolóellenállás A és B végpontjára kapcsoljuk. A C csúszókontaktus helyzetének változtatásával a tolóellenállás R értékének tetszőlegesen kis R_x részét elő tudjuk állítani. A V voltmérőt, amellyel az R_x ellenálláson eső U_x feszültséget mérjük, az R megfelelő

végéhez és a C csúszókontaktushoz kötjük. Az A és B pontok közti ellenállásra jutó



4. ábra

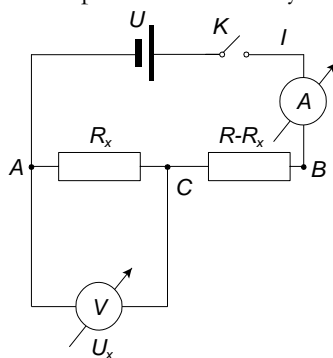
feszültségesés U , az $R_x \leq R$ ellenállású AC szakaszon a feszültségesés U_x .

Ha az R_x szakaszon eső feszültséget mérő voltmérő ellenállása végtelen nagyra tekinthető, akkor rajta áram nem folyik. Így az R_x ellenálláson átfolyó áram erőssége a csúszókontaktus helyzetétől függetlenül a főágban folyó áram I erősségével azonosnak vehető.

Ohm törvényét alkalmazva $U = IR$ és $U_x = IR_x$, amelyből az A és a C pontok között mérhető leosztott feszültség:

$$U_x = U \frac{R_x}{R}. \quad (19)$$

A potenciométer helyettesítő kapcsolási rajza az 5. ábrán látható.



5. ábra

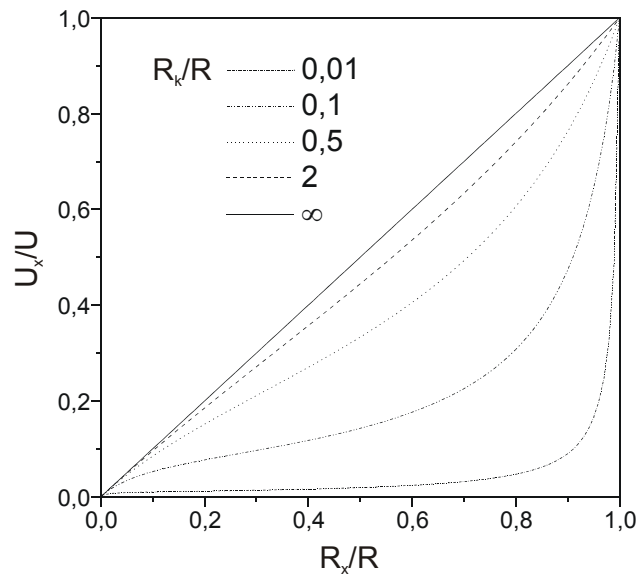
A fenti esetben az U feszültség a sorba kötött R_x és $R - R_x$ ellenállásokon az ellenállások értékével arányosan oszlik meg. Állandó R és U esetén az U_x csak R_x függvénye, tehát R_x változtatásával tetszés szerinti $U_x \leq U$ feszültséget elő tudunk állítani.

Terhelt potenciométer esetében az R_x ellenálláshoz párhuzamosan egy véges R_k ellenállás kapcsolódik, R_x helyébe ezen ellenállások párhuzamos eredője lép. A főágban folyó áram R_x -en és R_k -n az ellenállásokkal fordított arányban oszlik meg. Az A és a

C pontok közötti feszültségesés ebben az esetben:

$$U_x = \frac{R_x}{R} \frac{1}{1 + \frac{R_x}{R_k} - \frac{R_x^2}{RR_k}} U. \quad (20)$$

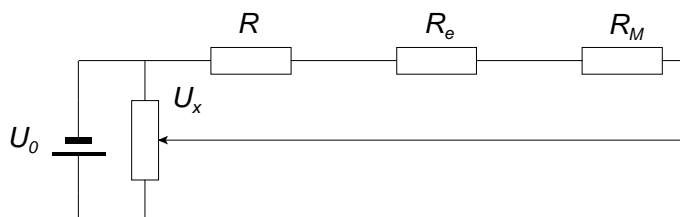
Az U_x/U feszültségosztás az R_x/R nemlineáris függvénye, amelynek lefutását az R_k/R értéke, azaz a terhelés mértéke befolyásolja. Végtelen nagy R_k esetében visszakapjuk a lineáris függést, mint ahogyan az a 6. ábrán látható.



6. ábra

Feladatok:

- 1) Számítsa ki a kiadott alaplőmérő belső ellenállását, hitelesnek elfogadva a rajta feltüntetett áramerősség- és feszültségértéket. Számítsa ki, hogy mekkora előtét-ellenállás alkalmazása szükséges az alaplőmérőből 3, 15, 30, 75, 150 és 300 V mérőhatárú feszültségmérő kialakításához.
- 2) Határozza meg a 3 V-os előtét és az alaplőmérő ellenállását az alábbi kapcsolási rajz alapján.



(Az U_x feszültséget a kiadott feszültségforrás és egy tolóellenállás segítségével a 4. ábrán látható potenciométeres szabályozással max. 3 V-ra állítsa be.) A körben folyó áram erősségét a kiadott, ismert értékű R ellenálláson eső feszültségből határozza meg.

- 3) Becsülje meg, hogy legfeljebb mekkora lehet az ampermérő belső ellenállása, illetve legalább mekkorának kell lennie a voltmérő belső ellenállásának, ha az 1., illetve a 2. ábrán látható kapcsolási rajz szerint kívánjuk megmérni egy adott R ellenállás értékét úgy, hogy a műszerek belső ellenállása által okozott rendszeres hiba ne haladjon meg R értékének 5 %-át.
- 4) A kiadott ellenállások mérésére válassza ki azt a kapcsolást, amely alkalmazásakor 5 %-nál nem nagyobb rendszeres hiba származik a műszerek belső ellenállásából. A mérés megtervezésekor használja fel az ellenállásokon feltüntetett névleges értékeket és azt, hogy a használandó milliamper-mérő ellenállása 10 mA-es, illetve 50 mA-es méréshatárnál 4Ω , illetve 1Ω , a feszültségmérőt pedig 3 V-os méréshatárban kell bekötni. Szabályozható feszültségforrásként a 2. feladatban összeállított feszültségforrás - tolóellenállás rendszert használja, **kis feszültségértékekről indulva**. Hasonlítsa össze a műszerek belső ellenállása által okozott hiba elhanyagolásával és figyelembe vételével kapott ellenállás értékeket.
- 5) Mérje meg a kiadott ellenállások értékét a 2. ábra szerinti összeállításban úgy, hogy voltmérőként a digitális műszert használja! Mivel a műszer belső ellenállása nagyobb, mint $10 \text{ M}\Omega$, ezért a számítás során tekintse végtelen nagyra. Hasonlítsa össze az ilyen módon kapott eredményeket az ellenállásokon feltüntetett névleges értékekkel.

- 6) Állítsa össze a 3. ábrán látható *Wheatstone*-hidas kapcsolást és mérje meg a kiadott ellenállások értékét. A hídban null-műszerként használt galvanométert egy előtét-ellenállás védi, amelyet a nyomókapcsoló benyomásával iktathatunk ki, ennek hatására a műszer érzékenysége körülbelül a 200-szorosára nő. Ezért a kapcsolót csak akkor szabad megnyomni, ha a hidat már úgy kompenzáltuk, hogy a galvanométer már nem mutat kitérést. A mérést mindig a galvanométer 1-es állásában kezdjük, majd kompenzálás után váltsunk érzékenyebb méréshatárra, így haladva a 4-es állásig. **A galvanométert 5-ös állásban nem szabad használni.**

Ajánlott irodalom:

📖 Hevesi Imre: Elektromosság, 6.§, 7.§

📖 Budó Ágoston: Kísérleti fizika II., 172.§-175.§, 177.§, 178.§

22. Elektromos mérőműszerek méréshatárának kiterjesztése

Célkitűzés:

- Kézi műszerek megismerése és használata.
- Feszültség és áramerősségmérő-műszerek méréshatárának kiterjesztése és a megnövelt méréstartományú műszerek hitelesítése.

Elméleti összefoglaló:

Az elektromos mérőműszerek igen nagy hányadánál a működés alapja az áram különböző hatása.

Az áram *vegyi* hatásán alapulnak a *voltaméterek* vagy *coulombméterek*. Ezekkel *Faraday* I. törvénye alapján áramerősséget lehet mérni az elektródon kiválasztott anyagmennyiség és az áramerősség közötti arányosság alapján, $m = kIt$. Az ezüst- és réz-*coulombmért* egyenáram mérésére használják.

Az áram *hőhatása* érvényesül a hődrótos műszereknél, amikor az áram által fejlesztett hő hatására egy kifeszített huzal hossza megnő, és ezt a hossznövekedést használják fel egy mutató elmozdítására. A műszerrel egyen- és váltakozó áramot is lehet mérni. A skálája nem lineáris. Főleg nagyfrekvenciás méréseknél használható, mert az általuk mutatott érték széles intervallumban független a frekvenciától.

Az áram *mágneses* hatásán alapuló műszerek csoportjai:

- lágvasas,
- forgótekerceses,
- elektrodinamikus műszerek.

A gyakorlatban használatos *lágvasas* műszerek egyik típusánál az áram átjárta tekercs mágneses tere a rugóra függesztett lágvasrudat a tekercs belsejébe húzza. A lágvasrúdnak az áram erősségétől függő elmozdulása egy a rugóhoz rögzített mutató

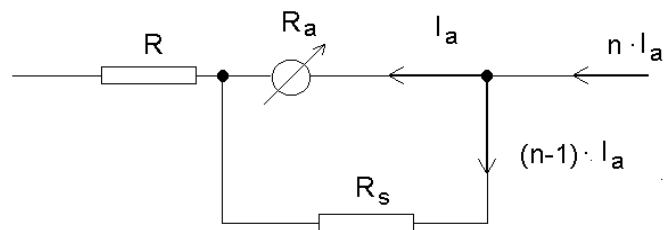
segítségével skálán olvasható le. A műszer váltakozó áram mérésére is alkalmas és skálája nem lineáris.

A *forgótekerces* műszereknél (Deprez és D' Arsonval, 1881) egy permanens mágnes gyűrű alakú légrésében fordulhat el egy sokmenetes tekercs, amely általában egy tengelyhez van rögzítve és a tengelyhez erősített spirálrugó biztosítja a tekercs fix egyensúlyi helyzetét. A permanens mágnes terének az áram átjárta tekercsre kifejtett hatása forgatja el a tekercset. Csak egyenáram mérésre használható, skálája lineáris.

Az *elektrodinamikus* műszereknél a forgótekercs nem permanens mágnes térben van, hanem egy másik, rögzített tekercsen is átvezetett áram mágneses tere hat a forgótekercsre. A két tekercs egymással sorba van kapcsolva. Egyen- és váltakozó áram mérésre is használható. Speciális elektrodinamikus műszer a teljesítménymérő (wattmérő), amelynél az egyik tekercs kicsi, a másik nagy ellenállású. Az előbbi tekercset a fogyasztóval sorba, az utóbbit vele párhuzamosan kapcsoljuk.

Azt, hogy egy műszer feszültség- vagy áramerősség mérő, a belső ellenállásának a mérendő ellenálláshoz való viszonya határozza meg. Ha a belső ellenállása nagyobb a fogyasztóénál, akkor feszültségmérőként párhuzamosan kapcsoljuk, ha belső ellenállása kisebb a fogyasztóénál, akkor áramerősség mérőként, sorosan kötve használjuk.

A méréshatár n -szeresre való kiterjesztése azt jelenti, hogy a műszer által mutatott érték n -szerese a mért mennyiség.



1. ábra

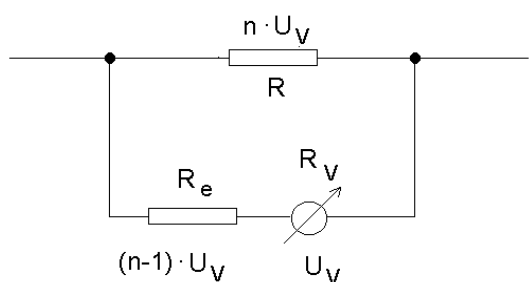
Az R_a áramerősségmérő-műszer méréshatárát úgy növeljük meg, hogy a műszerrel párhuzamosan az 1. ábra szerint ún. sönt (R_s) ellenállást kapcsolunk. Az n -szeres mé-

részhatár növekedés érdekében alkalmazandó sönt ellenállás értékét a párhuzamos ágakon eső feszültségek azonosságából kapjuk az (1) és (2) egyenlet szerint,

$$I_a R_a = R_s (n-1) I_a . \quad (1)$$

$$R_s = \frac{R_a}{n-1} . \quad (2)$$

ahol R_a az áramerősség mérő belső ellenállása, R_s a sönt ellenállása.



2. ábra

A feszültségmérő mérészatárát úgy növeljük meg, hogy a műszerrel sorba kötünk egy ún. előtét (R_e) ellenállást a 2. ábra szerint.

Az n -szeres mérészatár növekedés érdekében alkalmazandó előtét ellenállás értékét a sorosan kapcsolt feszültségmérő és az előtét ellenálláson átfolyó áram azonosságából kapjuk a (3) és (4) egyenlet szerint, ahol R_v a feszültségmérő belső ellenállása, R_e az előtét ellenállás értéke.

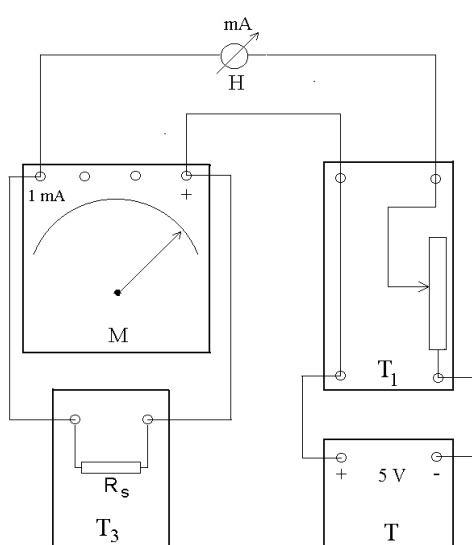
$$\frac{U_v}{R_v} = \frac{(n-1)U_v}{R_e} . \quad (3)$$

$$R_e = (n-1)R_v . \quad (4)$$

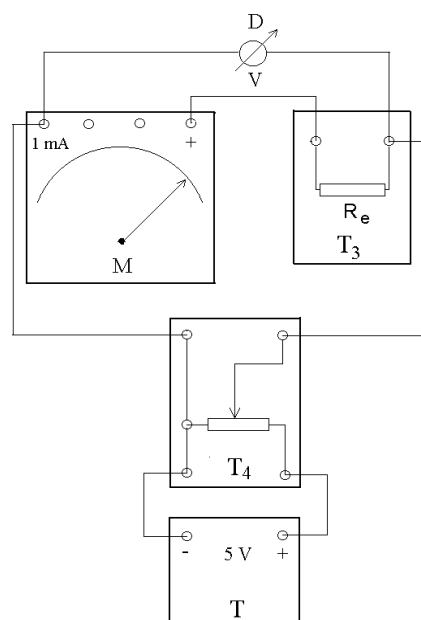
Feladatok:

- 1) Egy 339Ω belső ellenállású, 100 beosztás/1 mA érzékenységű műszerhez számolja ki azokat a söntöket, amelyek a mérészatárt 1, 2, 5, 10, 20, 50 mA-re növelik.
- 2) Egy 339Ω belső ellenállású, 100 beosztás/1 mA érzékenységű műszerhez számolja ki azokat az előtét ellenállásokat, amelyeknél a mérészatár 1, 5, 10, 20, 50 V lesz.

- 3) Állítsa össze a 20 mA méréshatárú áramerősség-mérőt a 3. ábra alapján. A T_1 áramszabályozó segítségével változtatva a körben folyó áramerősséget, mérje meg és ábrázolja a 20 mA-es méréshatárú M modellműszer által mutatott kitérés (skálárész) függvényében a H hiteles alpműszer (75 mV, 15 mA) által mutatott áramerősséget. Határozza meg a modellműszer átszámítási tényezőjét (mA/skálárész). Az ábrákon szereplő panelek jelölései a gyakorlat jelmagyarázatában találhatóak.

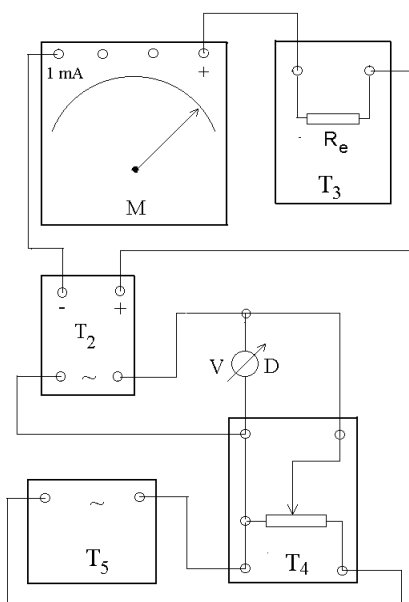


3. ábra



4. ábra

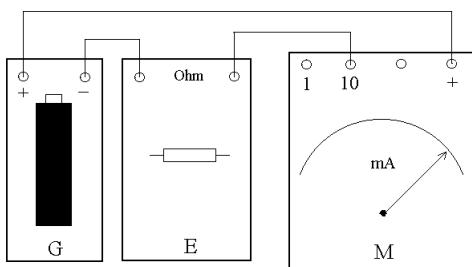
- 4) Állítson össze 5 V méréshatárú egyenfeszültség-mérőt a 4. ábra alapján. A T_4 potencióméterrel változtatva a feszültséget mérje meg és ábrázolja az 5 V méréshatárú modellműszer által mutatott kitérés (skálárész) függvényében a D digitális műszer által mutatott feszültségeket. Határozza meg a modellműszer átszámítási tényezőjét (V/skálárész).
- 5) Állítson össze váltakozó feszültség mérésére alkalmas 5 V méréshatárú műszert. Használja a kiadott T_2 Graetz-féle egyenirányítót az 5. ábra alapján.



5. ábra

Ábrázolja a modellműszer által mutatott kitérések függvényében a D digitális műszer által mutatott feszültségeket. Határozza meg a modellműszer átszámítási tényezőjét (V/skálárész).

- 6) Állítsa össze a 6. ábrán látható kapcsolást. Alkalmazza Ohm törvényét teljes áramkörre és határozza meg a kiadott elem elektromotoros erejét és belső ellenállását az



6. ábra

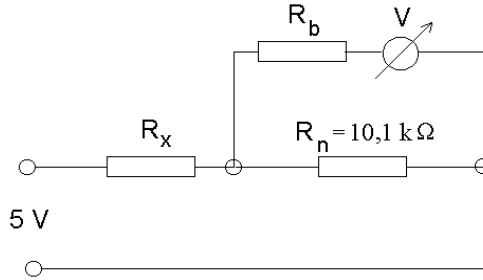
körre és határozza meg a kiadott elem elektromotoros erejét és belső ellenállását az

$$\frac{1}{I} = f(R_k) \quad (5)$$

függvény grafikonja alapján. R_k -t változtassa 0,2 – 2 k Ω közötti tartományban 200 ohmonként. Áram-

erősség mérésre most használja a modellműszert 10 mA-es méréshatárnál. Az R_k értékét a dekádellenállás és a műszer belső ellenállásának összege adja meg.

- 7) A kézi műszerekben megtalálható ellenállásmérő egység rendszerint úgy működik, hogy egy feszültségosztót hozunk létre az egymással sorba kötött mérendő (R_x) ellenállásból és egy ismert (R_n) ellenállásból, ez utóbbin eső feszültséget mérjük.



7. ábra

Állítson össze egy ilyen ellenállásmérő műszert a kiadott ellenállásmérő tábla segítségével a 7. ábra alapján. Feszültségmérőként az 5 V-os méréshatárra kiterjesztett műszert használja, R_x értékeit a dekádellenállásból vegye. Mérje meg a különböző R_x értékek mellett a feszültségmérő által

mutatott kitéréseket (skálárészekben). Mérési eredményeit ábrázolja grafikonon. R_x -et 600Ω -tól $2 \text{ k}\Omega$ -ig 200 ohmonként, majd $2 \text{ k}\Omega$ felett 400 ohmonként növelje $5,2 \text{ k}\Omega$ -ig.

- 8) Számítsa ki a feszültségmérő által mutatott feszültséget R_x függvényében. Ez a műszer ún. *skálátörvénye*. A számított U_N értékeket a mért értékeket bemutató grafikonon tüntesse fel.
- 9) A 7. feladatban kapott grafikont (hitelesítési görbét) felhasználva mérje meg a kiadott ellenállások értékét az összeállított ellenállásmérővel.

Jelmagyarázat:

- T₁ áramszabályozó
- T₂ egyenirányító tábla (*Graetz*-kapcsolás)
- T₃ ellenállás-panel
- T₄ feszültségosztó
- T₅ váltakozó áramú tápegység
- E ellenállásszekrény (dekádelLENállás)
- M modellműszer
- A alpműszer (75 mV, 15 mA)
- G 1,5 V-os elem
- T egyenfeszültségű tápegység
- D digitális műszer

Ajánlott irodalom:

📖 Hevesi Imre: Elektromosság, 198. o.

📖 Budó Ágoston: Kísérleti Fizika II., 172.§-178.§

23. A galvanométer vizsgálata

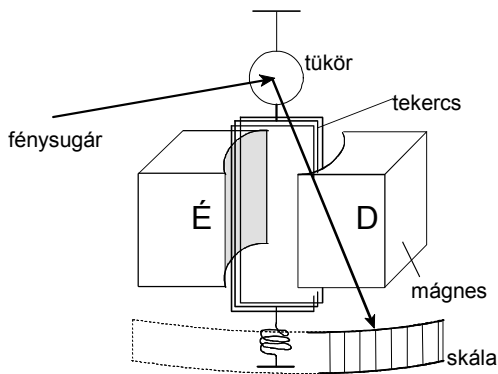
Célkitűzés:

- A galvanométer jellemző paramétereinek, nevezetesen a redukciós faktorának (C), a belső ellenállásának (R_b) és az aperiodikus határellenállásának (R_h) meghatározása.
- Csillapított forgási rezgések tanulmányozása galvanométer esetében.
- Mérési eredmények linearizálása.
- Egyszerű feszültségosztó tervezése.

Elméleti összefoglaló:

A galvanométerekről általánosan

A galvanométerek olyan, elsősorban gyenge áramok (alsó határ: 10^{-10} A) kimutatására és mérésére szolgáló műszerek, amelyek egy áram átjárta vezető (tekercs) és egy permanens mágnes mágneses terének kölcsönhatásán alapulnak. Utóbbi időben többnyire a forgótekercses galvanométerek maradtak meg használatban. A forgótekercses galvanométerekben (*Deprez* és *D'Arsonval*, 1881) egy rögzített patkómágnes hengeresen kivájt pólusai és a közöttük elhelyezkedő, szintén rögzített lágyvas-henger közti keskeny légrésben fordulhat el az áramot vivő tekercs. A tekercs rögzített tengely körül forog, vagy az érzékenyebb típusoknál vékony fém-



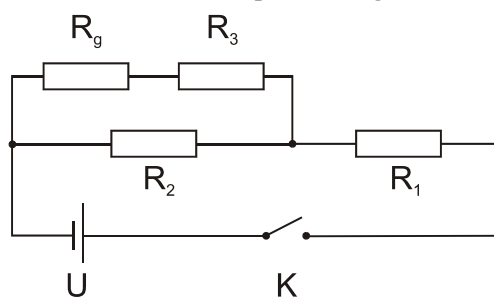
1. ábra

nyire a forgótekercses galvanométerek maradtak meg használatban. A forgótekercses galvanométerekben (*Deprez* és *D'Arsonval*, 1881) egy rögzített patkómágnes hengeresen kivájt pólusai és a közöttük elhelyezkedő, szintén rögzített lágyvas-henger közti keskeny légrésben fordulhat el az áramot vivő tekercs. A tekercs rögzített tengely körül forog, vagy az érzékenyebb típusoknál vékony fém-

vanométer, lásd az 1. ábrát). A tekercs körbefordulását a tengelyéhez erősített visszatérítő rugó, illetve a felfüggesztésére alkalmazott fémszál torziója akadályozza meg. Jó galvanométereknél a tekercs helyén a mágneses térerősség igen nagy, így nem érvényesülhet az esetleges külső mágneses terek zavaró hatása. A tér mindenütt radiális irányú és egyenlő nagyságú, így a tekercs φ szögelfordulása arányos a rajta átfolyó áram erősségével. Ez utóbbi miatt válik az eszköz alkalmassá egyenáramú áramerősség mérésére. Az áram erőssége (I) leolvasható a tekercshez rögzített mutatónak, illetve a felfüggesztő szála erősített tükréről visszaverődő fénysugárnak a helyzete alapján.

A galvanométer tekercsének mozgásegyenlete

Az érzékeny galvanométer tekercse az áramforrás be- vagy kikapcsolása után általános esetben csillapodó rezgéseket végez. Ezen rezgések vizsgálata céljából



2. ábra

kapcsoljuk galvanométerünket az U feszültségű feszültségforrásra a 2. ábrán látható kapcsolási rajz alapján. Az R_2 ellenállás értékét úgy választjuk meg, hogy érvényes legyen a következő egyenlőtlenség:

$$R_2 \ll R_g, \quad (1)$$

ahol R_g a galvanométer belső ellenállását jelöli. Ezzel olyan érzékeny feszültség-

osztást érünk el, hogy ha változtatjuk is a galvanométerrel sorba kapcsolt R_3 ellenállás értékét, R_2 párhuzamos kapcsolása miatt az R_2 és az $(R_g + R_3)$ párhuzamos eredője, s ezzel az R_2 -n eső feszültség értéke 0,1 %-on belül állandó marad.

A tekercsnek a mágneses tér irányára merőleges oldalaira (l) az áthaladó I áram erősségével arányos erők hatnak, amelyek erőpárt képeznek. Az erőpár

$$M_1 = N \cdot B \cdot l \cdot d \cdot I \quad (2)$$

nagyságú forgatónyomatékokot fejt ki a tekercsre, ahol N a tekercs menetszáma, B a mágneses indukció nagysága, l a tekercs keretének a mágneses térben levő magassága, d pedig a szélessége.

A

$$G = N \cdot B \cdot l \cdot d \quad (3)$$

jelölést bevezetve, (2)-ből az

$$M_1 = G \cdot I \quad (4)$$

kifejezést kapjuk, ahol G az ún. dinamikus műszerállandó.

Az M_1 forgatónyomaték hatására a tekercs elfordul, ezért a torziós szálban

$$M_2 = -D^* \cdot \varphi \quad (5)$$

ellentétes irányú forgatónyomaték lép fel, ahol φ a nyugalmi helyzethez képest mért elfordulás szöge, D^* pedig a szál direkciós nyomatéka. (A negatív előjel (5)-ben arra utal, hogy az M_2 forgatónyomaték a tekercset nyugalmi helyzetébe igyekszik visszatéríteni.)

A keskeny légrésben forgó tekercsre a levegősúrlódás miatt

$$M_3 = -\rho \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad (6)$$

nagyságú forgatónyomaték is hat, ahol $d\varphi/dt$ a tekercs szögsebessége, ρ pedig a mechanikai csillapodásra jellemző arányossági tényező. A negatív előjel (6)-ban arra utal, hogy a forgatónyomaték a szögsebességgel ellentétes irányú.

A mágneses térben $d\varphi/dt$ szögsebességgel forgó tekercsben

$$U_i = N \cdot B \cdot l \cdot d \cdot \frac{d\varphi}{dt} = G \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad (7)$$

nagyságú feszültség indukálódik, amely az (1) feltétel alapján:

$$I_i = \frac{G \cdot \frac{d\varphi}{dt}}{R_g + R_3} \quad (8)$$

nagyságú áramot hoz létre, ahol R_g a galvanométer belső ellenállása, R_3 pedig a galvanométerrel sorba kötött ellenállás. Ez az áram a mérendő I áramra szuperponálódik.

I_i hatására a tekercsre a mágneses tér

$$M_4 = -G \cdot I_i = \frac{-G^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}}{R_g + R_3} \quad (9)$$

nagyságú forgatónyomatékokat gyakorol, amely a *Lenz*-törvény értelmében a szögsebességgel ellentétes irányú. Erre utal a negatív előjel a (9)-ben.

A tekercs "eredő" elfordulását a forgómozgás alapegyenletéből ($\sum M = \Theta \ddot{\varphi}$) számítjuk:

$$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = \Theta \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2}, \quad (10)$$

ahol Θ a tekercs forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka. Beírva a (4), (5), (6) és (9) egyenletekben megadott forgatónyomatékokat, és bevezetve a

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{G^2}{\Theta \cdot (R_s + R_3)} + \frac{\rho}{\Theta} \right) = \beta \quad \text{és} \quad \frac{D^*}{\Theta} = \omega_0^2 \quad (11)$$

jelöléseket, ahol β a csillapításra, ω_0 pedig a rugalmas erőre jellemző, az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \cdot \beta \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 \cdot \varphi = G \cdot \frac{I}{\Theta}. \quad (12)$$

A (12) egyenlet a *csillapodó rezgőmozgás egyenlete*. A gyakorlat során a galvanométer paramétereit a (12) egyenletből kiindulva határozzuk meg.

A galvanométer redukciós faktorának és belső ellenállásának meghatározása

Az I erősségű egyenáram hatására – kellően hosszú idő elteltével – a galvanométer tekercse az $I = 0$ kezdeti állapothoz képest φ szöggel jellemzett helyzetben lesz nyugalomban. A nyugalom feltétele:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad (13)$$

ezért a (12) mozgásegyenlet egyszerűsödik:

$$D^* \cdot \varphi = G \cdot I \quad (14)$$

A (14) egyenlet fejezi ki azt, hogy nyugalmi helyzetben a $G \cdot I$ forgatónyomatékokat a $D^* \cdot \varphi$ torziós nyomaték kiegyensúlyozza. Ez azt is jelenti, hogy a tekercs elfordulási szöge arányos a tekercsen átfolyó áram erősségével.

Mivel a galvanométer felépítése olyan, hogy a tekercs elfordulását a torziós szála erősített tükör egy skálára vetíti ki úgy, hogy a φ szögelfordulás arányos a skála s osztásával is, felírható az arányosságot kifejező egyenlet:

$$\varphi = A \cdot s, \quad (15)$$

ahol A az arányossági tényező. A (14) és (15) egyenletekből következik az, hogy a galvanométeren a rajta átfolyó áramerősséggel *arányos* kitérést (skálaosztást) olvashatunk le.

A galvanométer redukciós faktorán (C), azaz érzékenységén az egységnyi kitéréshez (skálaosztáshoz) tartozó áramerősséget értjük:

$$C = \frac{I}{s}. \quad (16)$$

A (14), (15) és (16) egyenletekből a

$$C = \frac{A \cdot D^*}{G} \quad (17)$$

összefüggés adódik, amely azt mutatja, hogy a redukciós faktort a tekercs felfüggesztésére használt szál direkciós nyomatéka (D^*) és a tekercs dinamikus műszerállandója (G) határozza meg.

A 2. ábra alapján felírható, hogy a tekercsen

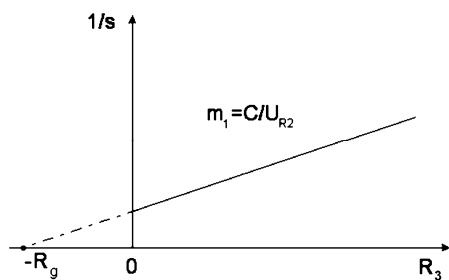
$$I = \frac{U_{R_2}}{R_g + R_3} \quad (18)$$

áram folyik át, ahol U_{R_2} az R_2 ellenálláson eső feszültség. Így a (16) és (18) egyenletek-

ből következik, hogy

$$\frac{1}{s} = \frac{C}{U_{R_2}} \cdot (R_g + R_3) \quad (19)$$

A (19) egyenlet lehetőséget ad a belső ellenállás és a redukciós faktor meghatározására a 3. ábrán látható módon, ha feltételezzük, hogy U_{R_2} állandó (ennek a közelítésnek a helyességét az (1) feltétel biztosítja).



3. ábra

Az aperiodikus határellenállás kiszámítása

A K kapcsoló kikapcsolása után a galvanométer tekercse visszatér eredeti nyugalmi állapotába. A visszatérés folyamatát a (12) egyenlet írja le, amikor $I = 0$:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \cdot \beta \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 \cdot \varphi = 0. \tag{20}$$

A (20) megoldása nem nagyon nagy súrlódásnál, azaz $\beta^2 < \omega_0^2$ esetében az alábbi:

$$\varphi = \varphi_0 \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t). \tag{21}$$

A (21) egyenlet csillapított torziós rezgéseket ír le.

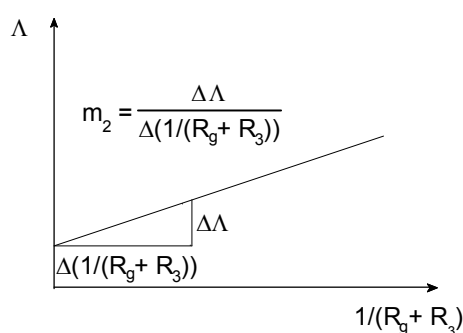
A csillapítás jellemzésére a Λ logaritmikus dekrementumot használják, amely definíció szerint két, egymás utáni, azonos irányú kitérés hányadosának, a csillapodási hányadosnak (K) a természetes alapú logaritmus:

$$\Lambda = \ln K = \ln \frac{s_1}{s_2}, \tag{22}$$

amely a β csillapítási tényezővel és a rezgés frekvenciájával (ω), illetve sajátfrekvenciájával (ω_0) az alábbi kapcsolatban van:

$$\Lambda = \frac{2 \cdot \pi \cdot \beta}{\omega} \approx \frac{2 \cdot \pi \cdot \beta}{\omega_0}. \tag{23}$$

A (11)-ben definiált kifejezések beírásával értéke a következő alakú lesz:



4. ábra

$$\Lambda = \frac{\pi}{\sqrt{\Theta \cdot D^*}} \cdot \left(\frac{G^2}{R_g + R_3} + \rho \right) \tag{24}$$

Λ -át az $1/(R_g + R_3)$ függvényében ábrázolva egyenest kapunk (lásd a 4. ábrát). Ezen egyenes meredeksége alapján az aperiodikus határellenállás értéke meghatározható.

Ha megvizsgáljuk a csillapítási tényezőre a (11)-ben felállított kifejezést, akkor megállapíthatjuk, hogy β értéke az $R_3 = \infty$ esetben a legkisebb. R_3 értékét csökkentve az ún. aperiodikus határesetbe jutunk:

$$\omega_0 = \beta, \tag{25}$$

melyre az a jellemző, hogy a galvanométer tekercse ekkor veszi fel leggyorsabban a nyugalmi helyzetét.

A galvanométer aperiodikus határellenállásának (R_b) a galvanométerrel sorba kapcsolt R_3 ellenállás azon értékét értjük, amely mellett a galvanométer mutatója a leggyorsabban állapodik meg az egyensúlyi helyzetben.

A határellenállást a (25) és (11) egyenletekből kiindulva számíthatjuk:

$$\sqrt{\frac{D^*}{\Theta}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{G^2}{\Theta \cdot (R_g + R_3)} + \frac{\rho}{\Theta} \right). \quad (26)$$

Figyelembe véve, hogy a gyakorlat során használt galvanométerre érvényes a

$$\frac{\rho}{\Theta} \ll \sqrt{\frac{D^*}{\Theta}} \quad (27)$$

egyenlőtlenség, ezért az $R_3 = R_b$ határellenállásra az alábbi kifejezést kapjuk:

$$R_b = \frac{1}{2} \cdot \frac{G^2}{\sqrt{\Theta \cdot D^*}} - R_g. \quad (28)$$

Tekintve, hogy a 4. ábrán látható egyenes meredeksége:

$$m_2 = \pi \cdot \frac{G^2}{\sqrt{\Theta \cdot D^*}}, \quad (29)$$

a határellenállást a kísérleti adatokból az alábbi kifejezés alapján számíthatjuk:

$$R_b = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_2}{\pi} - R_g. \quad (30)$$

Megjegyzések:

- A galvanométer túlterhelésre és mechanikai rázkódásra nagyon érzékeny, drága mérőműszer.
- R_3 alábbiakban megadott értékei esetén a galvanométer egyensúlyi helyzetét csak kb. két perc után veszi fel.
- A mérési hibák csökkentése érdekében ügyeljünk arra, hogy az R_1 és R_3 értékeinek beállítására használt ellenállásszekrény kúpos rézdugói szorosan illeszkedjenek a furatokba.

Feladatok:

- 1) Olvassa le a galvanométer adattáblájáról a galvanométer legérzékenyebb, 5-ös állásához tartozó redukciós faktor (C) és belső ellenállás (R_g) értékét, valamint a galvanométer aperiodikus határellenállását (R_h). Mérje meg a kiadott telep elektromotoros erejét (U) a digitális műszerrel.
- 2) C és R_g ismeretében a kapcsolási rajz alapján számítsa ki azt, hogy mekkora értéket kell a feszültségosztó R_1 ellenállásán beállítani ahhoz, hogy a galvanométeren kb. 80 - 100 skálarész kitérés jöjjön létre az $R_3 = 0 \Omega$ értéknél ($R_2 \approx 0,22 \Omega$).
- 3) a) Mérje meg a galvanométer kitérését skálarészekben $R_3 = 0, 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200 \Omega$ értékeinél.
b) Ábrázolja a kitérés (s) reciprokát R_3 függvényében.
c) Feltételezve, hogy az U_{R_2} feszültség az R_3 nullától különböző értékeinél nem változik jelentősen, vagyis U_{R_2} jó közelítéssel állandónak tekinthető a kapott egyenes felhasználásával határozza meg a galvanométer redukciós faktorának (C) és belső ellenállásának (R_g) értékét. Számítsa ki a névleges értékektől való relatív eltéréseket.
d) Hibaterjedéssel számolva adja meg a C mért értékének azt a maximális relatív hibáját, amely abból származik, hogy az U_{R_2} a mérés során, R_3 változtatásával, kis mértékben változik. Használja ki, hogy $R_2 \ll R_g$ és $R_2 \ll R_1$, valamint azt, hogy $\Delta R_{3,max} = 200 \Omega$.
- 4) a) Számítsa ki, hogy $R_3 = 100, 50, 30, 20, 15, 12, 10 \text{ k}\Omega$ esetén mekkora R_1 értéket kell beállítani ahhoz, hogy a galvanométeren kb. 80 - 100 skálarész kitérést érjünk el. Az eredményeket foglalja táblázatba.
b) Állítsa be az előző feladatban kiszámított R_3, R_1 ellenállás-párokat. Kapcsolja be a K kapcsolót és várja meg a nyugalmi helyzet kialakulását. Olvassa le az s_0 kitérés értékét. Kapcsolja ki a K kapcsolót és olvassa le az előzővel azonos irányú s_1 kitérést.
c) Számítsa ki a logaritmikus dekrementum (Λ) értékeket és ábrázolja ezeket az $1/(R_3 + R_g)$ függvényében.

- d) A kapott egyenes alapján határozza meg az aperiodikus határellenállás (R_h) értékét. Számítsa ki a névleges értéktől való relatív eltérést.

Kérdések:

- Miért úgy szállítják a galvanométert, hogy a legnagyobb érzékenyséű állásba kapcsolva egy rövid vezetékkel rövidre zárják?
- Miért függ a galvanométer tekercse forgási rezgéseinek csillapodása az R_3 ellenállás értékétől?
- Mi az előnye és mi a hátránya annak, hogy a galvanométerrel $R_3 = R_h$ nagyságú ellenállást kapcsolunk sorba?

Ajánlott irodalom:

- 📖 Hevesi Imre: Elektromosság, 8.2., 8.3., 8.4., 8.5. fejezet
- 📖 Budó Ágoston: Kísérleti Fizika I., 88. §
- 📖 Budó Ágoston: Mechanika, 18.§
- 📖 Budó Ágoston: Kísérleti Fizika II., 185. §

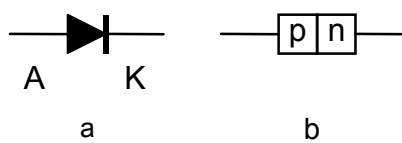
24. Félvezető diódák vizsgálata

Célkitűzés:

- Alapvető félvezető diódatípusok (egyenirányító, Zener-dióda, LED, fotodióda) és azok tulajdonságainak megismerése.
- Függvények linearizálásának gyakorlása.

Elméleti összefoglaló:

A diódák olyan áramköri elemek, melyeken azonos feszültségek hatására nyitóirányban sokkal nagyobb áram folyik, mint ellenkező polaritásnál, záróirányban, azaz ellenállásuk a rájuk kapcsolt feszültség polaritásától függ. Ezen tulajdonságuk alapján a diódákat váltakozó



1. ábra

feszültség egyenirányítására használhatjuk fel. Rajzjelük az 1.a ábrán látható. Nyitóirány esetén az A anód pozitívabb potenciálon van, mint a K katód.

A félvezető dióda egyetlen félvezető kristály, melynek egyik felét, az anódot, p típusúan, azaz akceptor nivókkal, másik felét, a katódot, n típusúan, azaz donor nivókkal szennyezték (1. ábra). E két tartomány között egy elektromos kettősréteg az ún. átmeneti réteg alakul ki. Ez a réteg teszi lehetővé az egyenirányítást.

A félvezető diódák működésének megértéséhez mindenképp vizsgáljuk meg, hogy milyen egyensúlyi állapot alakul ki a pn átmenet közelében külső feszültség alkalmazása nélkül. A két különböző módon szennyezett rétegben az elektronok, illetve lyukak koncentrációja eltér, mivel termikus diffúzió révén az n rétegből elektronok jutnak a p rétegbe, és hasonlóképpen a p rétegből lyukak vándorolnak az n rétegbe, ezek az ún. *többségi töltéshordozók*. Mozgásuk eredményeként az n rétegben egy *pozitív*,

míg a p rétegben egy *negatív* kompenzálatlan töltéssűrűség jön létre. Ez a tértöltés egy elektrosztatikus teret hoz létre, vagyis potenciálkülönbség alakul ki az átmeneti réteg két oldala között. Ez a potenciálgát természetesen akadályozza újabb töltéshordozók termikus diffúzióját, így igen rövid idő alatt az átmeneti rétegben egy dinamikus egyensúlyi állapot jön létre. A diódára kapcsolt külső feszültség ezt az egyensúlyi állapotot fogja megzavarni.

Nyitóirányú feszültség csökkenti a potenciálgát magasságát, így a töltéshordozók újra képesek nagy számban a másik rétegbe átdiffundálni. Szemléletesen ezt úgy is elképzelhetjük, hogy ilyenkor az n rétegre kapcsolt negatívabb (illetve a p rétegre kapcsolt pozitívabb) potenciál a rétegben döntő módon jelenlevő elektronokat (lyukakat) az átmenet felé "hajítja", tehát a dióda kinyit.

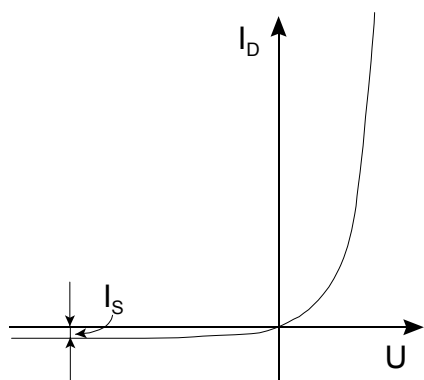
Záróirányú feszültség növeli az átmenetnél kialakult potenciálgát magasságát, ezáltal gátolja az elektronok, illetve a lyukak mozgását. Szemléletes képünk alapján most azt mondhatjuk, hogy az n (p) rétegre kapcsolt pozitív (negatív) feszültség elszívja az elektronokat (lyukakat) az átmeneti réteg közeléből, miáltal egy kiürített szigetelő réteg jön létre az n és p típusú rétegek között, így a dióda lezár. Meg kell jegyezni, hogy a fenti idealizált képpel ellentétben a valóságban záróirányú előfeszítés esetén is folyik áram egy diódán keresztül. Ennek az a magyarázata, hogy a kiürített tartományban megmarad az újabb elektron-lyuk párok generálódásának lehetősége. Az így keltett töltéshordozók azután alapvetően kétféle módon keltenek áramot. Vagy alagúteffektussal lépnek át a szomszédos rétegbe, vagy (ha a zárófeszültség nagy) a potenciálgáton felgyorsulva saját rétegükben kelhetnek újabb töltéshordozó párokat (lavina effektus). A *Zener*-diódáknál ezt az utóbbi feszültségtartományt használjuk a feszültség stabilizálására.

Egy diódán átfolyó I_D áram a legegyszerűbb félvezető fizikai modell szerint:

$$I_D = I_S \left(e^{\frac{U}{U_T}} - 1 \right), \quad (1)$$

ahol I_S az ún. telítési áram, mely a dióda paramétereitől függ, U a diódára kapcsolt feszültség, melyet nyitóirányban tekintünk pozitívnak, $U_T = kT/q$, k a *Boltzmann* ál-

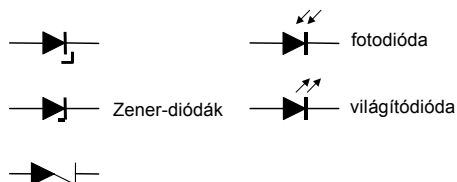
landó, T az abszolút hőmérséklet, q az elektron töltése. U_T értéke szobahőmérsékleten ~ 26 mV. Tapasztalat szerint a fenti egyenlet elég jól leírja a szilícium diódák $I(U)$ ka-



2. ábra

rakterisztikáját (2. ábra), ha U_T helyett egy 30-50 mV közötti értéket írunk az egyenletbe. Mivel a diódák áram-feszültség kapcsolata nem lineáris, ezért a klasszikus ellenállás fogalom helyett célszerű bevezetni a dióda r_d dinamikus ellenállását, melyet a $\Delta U = r_d \cdot \Delta I_D$ egyenlettel értelmezünk. Ezt a paramétert leginkább a Zener-diódák jellemzésére használják, mivel működési tartományukban r_d konstansnak tekinthető.

Egyenirányításra minden dióda felhasználható, de alkalmazásuk ennél jóval szélesebb körű. A ténylegesen egyenirányításra használt diódákon belül is megkülönböztethetünk nagy áramokat elviselő, de csak alacsony frekvenciákon használható *teljesítménydiódákat*, illetve a csak kis (milliamperes nagyságrendű) áramokkal működtethető, de gyors *kapcsolódiódákat* (utóbbiakat a nagyfrekvenciás jelátvitelben alkalmazzák elsődlegesen). A záróirányú letörés tartományában károsodás nélkül üzemeltethető *Zener-*



3. ábra

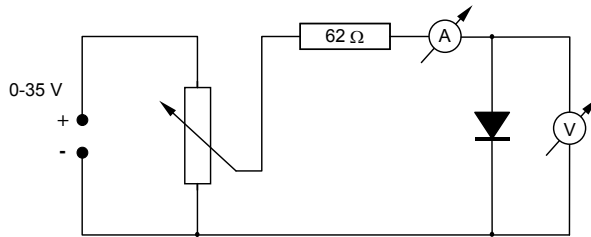
diódákat elsősorban feszültség stabilizálásra használják. *Fotodiódáknál* az átmeneti réteget megvilágító fény fotonjai töltéshordozópárokat generálnak, ami fotofeszültséget, avagy záróirányú kapcsolás esetén jól definiált (a zárófeszültség értékére kevésbé érzékeny) fotoáramot hoznak létre. Ha egy dió-

dán nyitó-irányú áram folyik át, az n rétegből elektronok mennek át a p rétegbe, ahol rekombinálódnak (elektron-lyuk párok megsemmisülése). A *világító diódák* (LED, azaz Light Emitting Diode) esetében ezen rekombinációs folyamatokból felszabaduló energia fény formájában távozik az átmeneti rétegből. Az itt megemlített alapvető dióda

típusokon kívül még számos más fajta is létezik, mint például a *kapacitásdióda*, *alagútdióda*, *Schottky-dióda*. A főbb diódatípusok áramköri jeleit a 3. ábra mutatja.

Feladatok:

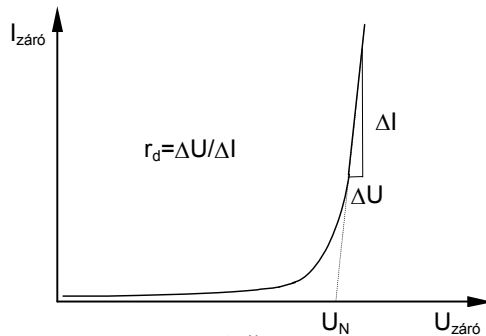
- 1) Állítsa össze a 4. ábrán látható kapcsolást. Vegye fel a kiadott Si-dióda nyitóirányú



4. ábra

karakterisztikáját. Az áramot 1-2-4-10 léptékben változtassa 10 μA -tól 100 mA-ig. (A mérés során célszerű a diódán átfolyó áramot beállítani és a hozzá tartozó feszültséget mérni.)

- 2) Vegye fel a kiadott GaAs LED nyitóirányú $I(U)$ karakterisztikáját a 10 μA - 40 mA tartományban. A mérés során az áramot 1-2-4-10 léptékben változtassa és az áramoknak megfelelő feszültségeket olvassa le.
- 3) Ábrázolja mindkét dióda esetében az $\ln(I)$ értékeket U függvényében.
- 4) A 4. ábra szerinti kapcsolásban cserélje ki a Si-diódát *Zener*-diódára. Vegye fel a

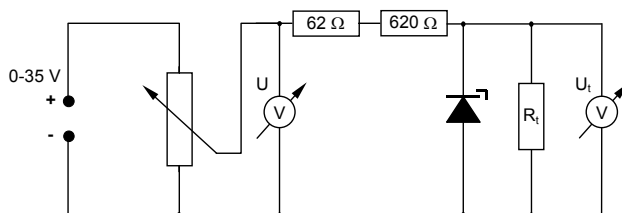


5. ábra

Zener-dióda záróirányú karakterisztikáját ($I_{max} = 75 \text{ mA}$). Ábrázolja az $I(U)$ karakterisztikát és határozza meg a névleges *Zener*-feszültséget (U_N), valamint a dinamikus ellenállást (r_d). (Lásd 5. ábra.)

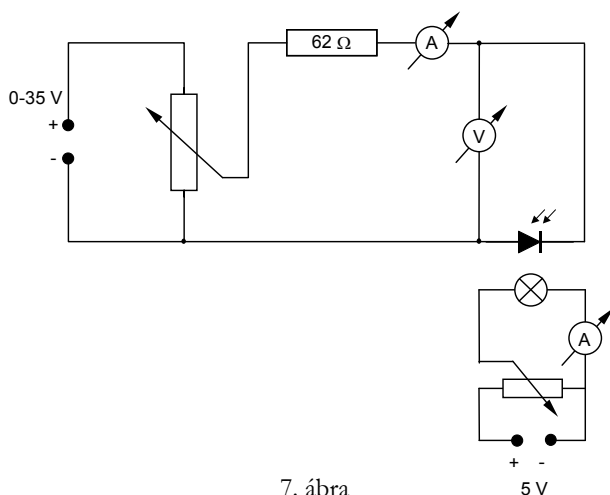
- 5) Az 6. ábrán megadott módon kössön sorba a *Zener*-diódával egy előtét-ellenállást (620Ω), továbbá vele párhuzamosan egy terhelést ($R_t = 7,5 \text{ k}\Omega$). Mérje meg a ter-

helésen eső U_f feszültséget az U feszültség függvényében (U -t 0-tól 20 V-ig változtassuk kb. 1V-onként).



6. ábra

- 6) Ábrázolja az 5. feladatban elvégzett mérések eredményeit. Hogyan magyarázza e két feladat tapasztalatai alapján a *Zener*-dióda feszültségstabilizáló hatását?
- 7) Állítsa össze a 7. ábrán látható kapcsolást. Mérje meg a fotodióda áramát az izzólámpa áramának függvényében, 5 V zárófeszültség mellett. A mérés során az izzólámpa áramát úgy válassza meg, hogy a lámpa mindig világítson és a maximális érték eléréséig legalább 6 ponton mérjen. Ábrázolja a diódán átfolyó áramot az izzó áramának függvényében.



7. ábra

lámpa áramának függvényében, 5 V zárófeszültség mellett. A mérés során az izzólámpa áramát úgy válassza meg, hogy a lámpa mindig világítson és a maximális érték eléréséig legalább 6 ponton mérjen. Ábrázolja a diódán átfolyó áramot az izzó áramának függvényében.

Ajánlott irodalom:

- 📖 Hevesi Imre: Elektromosság II., 10. §, 11. §
- 📖 Budó Ágoston: Kísérleti Fizika II., 206. §, 207. §
- 📖 Török Miklós: Elektronika II. Alkatrészek, II. D fejezet

25. Termoelektromotoros erő mérése

Célkitűzés:

- A *Seebeck*-effektus alkalmazását jelentő termoelemek vizsgálata, azok jellemzőinek meghatározása.

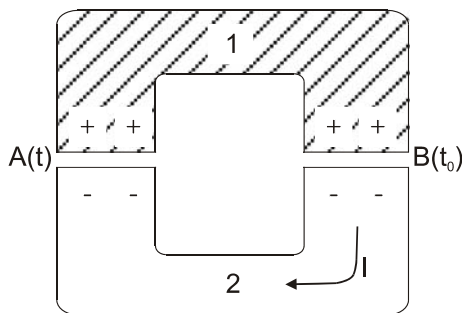
Elméleti összefoglaló:

Ha két különböző fémből összeállított vezetőkör összeköttetési pontjai, az ún. forrasztási pontjai különböző hőmérsékletűek, akkor a vezetőkörben elektromos áram indul meg. Az áramot létrehozó elektromotoros erő általában nő a forrasztási helyek közötti hőmérsékletkülönbséggel. E jelenséget nevezzük *Seebeck*-effektusnak (1821), a két különböző fémből álló eszközt pedig termoelemnek. A termoáramot létrehozó termoelektromotoros erő hőmérsékletfüggése jellemző a termoelemre, amely nem túl nagy hőmérsékletkülönbség esetén a következő formulával írható le:

$$E = a(t - t_0) + b(t - t_0)^2, \quad (1)$$

ahol t és t_0 a forrasztási pontok hőmérsékletét jelentik ($t > t_0$). Egy meghatározott t_0 -nál, általában $t_0 = 0^\circ\text{C}$ -nál, az a és b állandók a termoelemre jellemzők.

A termofeszültség keletkezését a *Galvani*-feszültség hőmérsékletfüggésével értelmezhetjük.



1. ábra

Vegyünk egy egymással érintkező, két fémből álló (1, 2) vezetőkört, amelyek között U_{12} *Galvani*-feszültség lép fel, amely a t hőmérsékletű A helyen nagyobb, mint a t_0 hőmérsékletű B helyen, vagyis A -nál több elektron lép 1-ből 2-be, mint B -nél. Az emiatt keletkező két különböző *Galvani*-feszültségre a huroktörvény

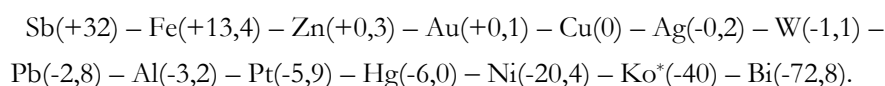
alapján fennáll, hogy zárt körben a teljes elektromotoros erő a két *Galvani*-feszültség különbsége:

$$E = U_{12}(t) - U_{21}(t_0), \quad (2)$$

amely $I = E/R$ áramot hoz létre, ahol R a vezetőkör ellenállása. Ha pl. az 1 vezetőrészt kettévágjuk, akkor a két szabad pólus között az E elektromotoros erő megmarad, ekkor a rendszer olyannak tekinthető, mint egy nyitott galvánelem. Ha a kettévágott 1 vezető pólusai közé beiktatunk egy további, más anyagú vezetőt, és az új érintkezési pontok azonos hőmérsékletűek, az eredő elektromotoros erő nem változik.

A *Galvani*-feszültség keletkezését a potenciálgödör-moddal értelmezhetjük. A két fémbe az elektronok *Fermi*-szintje és kilépési munkája különböző. Érintkezés után – a külső térben lévő elektronok energiáját választva zérus szintnek – a két fém elektronjainak *Fermi*-szintje azonos lesz, és a két fém kilépési munkái különbségének és az elektron töltésének hányadosaként adódik a *Galvani*-feszültség. Ezen értelmezéssel áll szoros kapcsolatban a *Seebeck* jelenség, de ennek kvantitatív mikrofizikai értelmezése igen bonyolult.

Létezik egy termoelektromos sor, amelyben a sor egy előrébb álló és egy hátrébb álló tagja között annál nagyobb a fellépő termoelektromos erő, minél távolabb vannak egymástól, és mindig az elől álló a pozitív. Ezen sor egy része:



A zárójelben lévő számok különbsége adja meg egy bizonyos termoelemnél az 1 °C hőfokkülönbségnél fellépő termoelektromotoros erőt mikrovoltban, azaz a termoelem érzékenységét, amely nem nagy hőmérséklet különbségnél a megadott (1) formulában a értékét jelenti. A vonatkoztatási fém – mint látható – a réz.

A termoelemeket általában hőmérsékletmérésre használják. Előnyük, hogy nagyon kis kiterjedésű hely hőmérsékletét mérhetjük velük (ponthőmérők), és kicsiny a hőkapacitásuk. Ha kicsiny a hőfokkülönbség, akkor több termoelemet kapcsolhatunk sorba, azaz termoszlopot használunk, így növelhetjük meg a keletkező kicsiny elekt-

* konstantán [54% Cu, 45% Ni, 1% Mn]

romotoros erőt. Sugárzási energia mérésénél mind a termoelem, mind a termooszlop érzékenységet növelhetjük, ha a besugárzott forrasztási pontot vákuumba helyezzük.

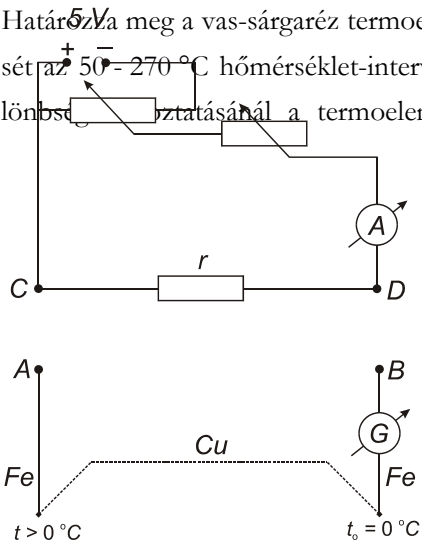
A fent tárgyalt bimetal termoelemek kicsiny elektromotoros erejük és hatásfokuk miatt energiaforrásként nem használatosak. Ilyen célra a félvezető termoelemek alkalmasak.

Csak az elektromotoros erő jellemző az adott termoelemre, a termoáram ugyanis függ a termoelem ohmikus ellenállásától, vagyis a termoelemet alkotó vezetők hosszától, keresztmetszetétől. Az elektromotoros erő mérésére olyan alkalmas módszert kell választani, amelynél nincs feszültségesés a belső ellenálláson. Ez akkor teljesül, ha a termoelemen nem folyik át áram. Ezt biztosítja pl. az ún. kompenzációs módszer, amelynél egy r ellenálláson létrehozott feszültségesés kompenzálja a termofeszültséget. A kompenzált állapotot a termoelem körébe beiktatott galvanométer árammentessége jelzi.

Meghatározott hőmérsékletek nem túl nagy pontosságú mérésére szokták a termoelem körébe beiktatott árammérő műszereket hőmérsékletre hitelesíteni. Ezeknél tehát tulajdonképpen termoáramokat mérnek. Nyilvánvaló, hogy egy ilyen hőmérsékletre hitelesített műszer csak egy megadott termoelemhez használható.

Feladatok:

- 1) Az 2. ábrán megadott kapcsolás alkalmazásánál hogyan kell bekötni a termoelemet ahhoz, hogy a termofeszültséget kompenzálni lehessen? Hogyan kapja meg a termoelektromotoros erőt?
- 2) Vas-sárgaréz termoelem esetében a Seebeck-együttható $a = 13,4 \mu V / ^\circ C$, továbbá $500\text{ }^\circ C$ -nál a termofeszültség előjelet vált. Ezen adatokból számítsa ki a termofeszültség hőmérséklet-függését leíró összefüggésben szereplő b együttható értékét és a maximális termofeszültséget.
- 3) Határozza meg a vas-sárgaréz termoelem termofeszültségének hőmérséklet-függését az $50\text{ }^\circ C - 270\text{ }^\circ C$ hőmérséklet-intervallumban $10\text{ }^\circ C$ -onként. A hőmérséklet különbség tartatásánál a termoelem egyik forrasztási pontját kis elektromos



fűtésű kályhával melegítjük, míg a másik forrasztási pontot olvadó jégbe helyezve állandóan 0 °C-on tartjuk. Állítson be először 1,5 A fűtőáramot, és folyamatos kompenzálás mellett mérje a termoelem "meleg" forrasztási helyén a hőmérsékletet és a megfelelő kompenzáló áramot. Ha a hőmérséklet-emelkedés túl lassú,

2. ábra

növelje a fűtőáramot úgy, hogy percenként kb. 4 - 5 °C-kal emelkedjék a hő-

mérséklet.

- 4) Számítsa ki a mért hőmérsékleti pontokon a termoelektromotoros erőket és ábrázolja azokat a hőmérséklet függvényében.
- 5) Linearizálja az $E(t)$ függvényt. Ábrázolja az E/t hányadosokat a vas-réz termoelemnél a hőmérséklet függvényében, és ezen grafikon alapján határozza meg az a és b együtthatókat. Hasonlítsa össze ezen a és b értékeket a 2) feladatban kapott értékekkel, és számítsa ki az ezektől való relatív eltérést.
- 6) Határozza meg a vas-konstantán termoelem (a konstantán összetétele: 55% Cu, 44% Ni, 1% Mn) termofeszültségének hőmérsékletfüggését az 50 °C - 270 °C hőmérséklet-intervallumban 20 °C-onként, és ábrázolja ezen termofeszültség értékeket a hőmérséklet függvényében.

Kérdés:

📖 Vesse össze a kétfajta termoelemet. Melyik előnyösebb hőmérsékletmérésre?

Ajánlott irodalom:

📖 Hevesi Imre: Elektromosság, 12.2.-12.3.

📖 Budó Ágoston: Kísérleti Fizika II., 168.§, 180.§, 205.§

📖 Budó Á. - Szalay L.: Fizikai laboratóriumi gyakorlatok, 9. §, 14.§

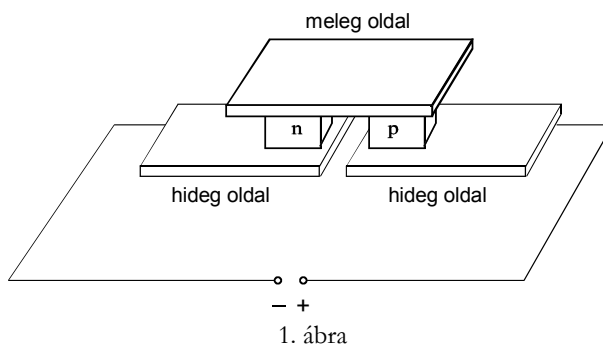
26. Termoelektromos hőpumpa (Peltier-cella) vizsgálata

Célkitűzés:

- A *Seebeck*- és *Peltier*-effektus tanulmányozása.
- A hőszivattyú fűtési és hűtési teljesítményének, valamint jóság tényezőjének meghatározása.

Elméleti összefoglaló:

A *Peltier*-elemmel két fontos fizikai jelenséget lehet bemutatni, amelyek egymás inverzei, a *Seebeck*- és a *Peltier*-effektust. Ha a *Peltier*-elem két oldalán hőmérséklet különbség van, akkor az elem a *Seebeck* effektus következtében elektromos feszültséget állít elő; ekkor az ún. termogenerátor üzemmódban működik. Ha viszont feszültséget kapcsolunk rá, akkor a *Peltier*-effektusnak megfelelően, mint hőszivattyú működik, és hőmérséklet-különbséget hoz létre. Szimmetria okok miatt mindkét jelenség megfordítható, ami azt jelenti, hogy ha a meleg és hideg oldalakat felcseréljük, akkor megváltozik a feszültség polaritása, ha pedig megfordítjuk az áram irányát a hőszivattyú üzemmódban, akkor a szivattyúzás iránya is megfordul, azaz a meleg és hideg oldal felcserélődik.



A gyakorlatban, a kimeneti feszültség emelése, illetve a hőátviteli sebesség növelése érdekében több *Peltier*-elemet kapcsolnak elektromosan sorba, termikusan pedig párhuzamosan. Pl. az általunk használt blokkban 142 db

félvezető termoelem (*Peltier*-elem) található, amelyek egyikének elvi felépítése az 1. ábrán látható.

A termoelektromos folyamatok, azaz a *Seebeck*- és a *Peltier*-effektusok a fémekben és a félvezetőkben lejátszódó termikus és elektromos folyamatok közötti kapcsolatok következményei. Megfigyelhető, hogy a *Seebeck*- és *Peltier*-jelenségek nem önmagukban, hanem további folyamatok kíséretében lépnek fel. Ezek a következők: *Thomson-effektus*, *hővezetés* valamint a *Joule-hő*.

Seebeck-effektus:

Ha két különböző vezetőből zárt áramkört készítünk és az egyik forrasztási helyet T , a másikat $T + \Delta T$ hőmérsékleten tartjuk (és a ΔT elég kicsi), akkor a körben

$$U = \sigma \Delta T \tag{1}$$

feszültség keletkezik. A képletben szereplő σ tényező az ún. *Seebeck*-együttható, amely a felhasznált anyagkombinációra jellemző, függ a hőmérséklettől, de független a kontaktusok geometriájától.

Peltier-effektus:

A *Peltier*-effektus a *Seebeck*-effektus megfordításának tekinthető. Ha két különböző vezető forrasztási pontján I áram halad keresztül, akkor a *Joule*-hő okozta felmelegedés mellett az áram irányától függően a forrasztási ponton hő szabadul fel vagy abszorbeálódik, ezért a forrasztási pont felmelegszik vagy lehűl. Az időegység alatt felszabadult vagy elnyelődött hőmennyiségből származtatható a *Peltier*-hőteljesítmény:

$$P_p = \frac{dQ_p}{dt} = pI, \tag{2}$$

ahol a p a *Peltier*-együttható. Előjele az áram irányától függően pozitív vagy negatív.

A termodinamika I. és II. főtételeiből levezethető, hogy $p = \sigma T$, ezért (2) felírható az alábbi módon:

$$P_p = pI = \sigma TI, \tag{3}$$

ahol T az abszolút hőmérséklet.

Thomson-effektus:

Ha egy homogén vezető mentén hőmérséklet-különbséget (dT/dx hőmérséklet gradienst) hozunk létre, s ezen a vezető szakaszon I áram folyik keresztül a gradiens irányában, akkor a vezető egységnyi hosszúságú szakaszán keletkező, vagy eltűnő hőmennyiségből származó *Thomson*-hőteljesítmény:

$$P_T = \tau I \frac{dT}{dx}, \quad (4)$$

ahol τ az ún. *Thomson*-együttható, amely pozitív, ha a nagyobb hőmérsékletű helyről a kisebb hőmérsékletű hely felé folyó áram esetén hő keletkezik.

A termoelektromos jelenségek pontos mikrofizikai értelmezése igen bonyolult. A legegyszerűbb, korántsem teljes, de a jelenségek kvalitatív megértéséhez elegendő magyarázat az ún. szabadelektron modell alapján a következő:

A *Seebeck-effektus* magyarázata: ha egy vezeték egyik végét állandó magas hőmérsékleten tartjuk, akkor az itt levő elektronok kinetikus energiája nagyobb lesz, mint az alacsonyabb hőmérsékleten tartott végen levő elektronok kinetikus energiája. Ennek következtében az elektronok nagyobb számban diffundálnak a hideg vég felé, s így potenciálkülönbséget hoznak létre a két végpont között. A vezeték két vége között így előálló feszültség a *Seebeck*-feszültség vagy termoelektromotoros erő.

A *Peltier-effektus* azon alapszik, hogy az érintkezésben levő különböző vezetőkben vagy félvezetőkben a mozgékony töltések közepes mozgási energiája, w_1 és w_2 – mivel az az anyagi minőségtől is függ (eltérő *Fermi*-nívó) – nem egyenlő egymással. Legyen pl. $w_1 > w_2$, és az áram iránya olyan, hogy a töltéshordozók az 1 vezetéből a 2 vezetőbe haladjanak. A 2 vezetőbe érve ott a kristályrács elemeivel ütközve energiát adnak át nekik, így az a vezetőrész felmelegszik. Ez a folyamat a 2 vezetőnek az érintkezési felülethez közeli igen vékony rétegében játszódik le, ezért az érintkezés felmelegedését tapasztaljuk. Ha ugyanilyen feltételek mellett az áram ellentétes irányú, akkor az érintkezési (forrasztási) hely lehűl.

A *Thomson-effektus* úgy jön létre, hogy ha az áram a melegebb helyről a hidegebb helyre "viszi" az elektronokat, azok a magukkal vitt többletenergiát ott leadják és emiatt a vezető azon része felmelegszik. Hidegebb helyről a melegebb vezetőrésszbe jutva pedig energiát vesznek fel, melynek következtében a vezető azon része lehűl.

Joule-féle hő:

Egy R ellenállású izoterm vezetőben időegység alatt fejlődő hőmennyiségből származó hőteljesítmény, ha rajta I áram halad át:

$$P_j = \frac{dQ_j}{dt} = RI^2. \quad (5)$$

A hővezetés hatása:

Hővezetés következtében a T_m hőmérsékletű melegebb oldalról a T_b hőmérsékletű hidegebb oldalra szállított Q_L hőmennyiségből származó hőteljesítmény:

$$P_L = \frac{dQ_L}{dt} = \frac{L(T_m - T_b)A}{d}, \quad (6)$$

ahol L a hővezetési együttható, A jelöli a vezető keresztmetszetét, d a vezető hosszát.

A Peltier-elem energetikai viszonyai:

Az 2. ábra alapján – összefoglalva a *Peltier*-elem energia- és hőkapcsolatait – az elem fűtési teljesítménye a meleg oldalon:

$$P_f = \sigma I_p T_m + \frac{1}{2} \frac{\tau I_p \Delta T}{d} + \frac{1}{2} I_p^2 R - \frac{L A \Delta T}{d}, \quad (7)$$

és az elem hűtési teljesítménye a hideg oldalon, azaz adott idő alatt a hűtött oldalról elvont hőmennyiség:

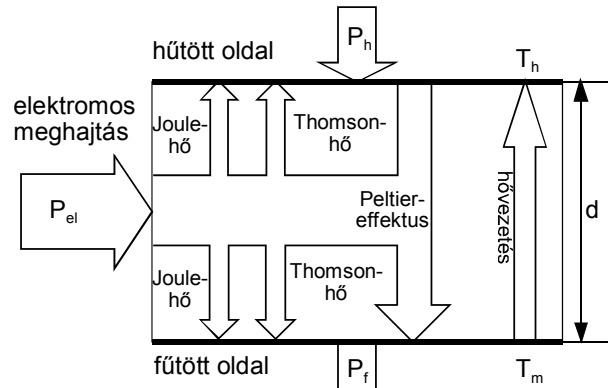
$$P_b = \sigma I_p T_b - \frac{1}{2} \frac{\tau I_p \Delta T}{d} - \frac{1}{2} I_p^2 R - \frac{L A \Delta T}{d}, \quad (8)$$

ahol $\Delta T = (T_m - T_b)$, és I_p a betáplált elektromos áram erőssége.

A *Peltier*-elembe betáplált elektromos teljesítmény az energia-megmaradás elve alapján P_f és P_b különbsége:

$$P_d = P_f - P_b = \sigma I_p \Delta T + \frac{\tau I_p \Delta T}{d} + I_p^2 R = U_p I_p, \quad (9)$$

ahol U_p a *Peltier*-elemen mért feszültség.



2. ábra

A *Peltier*-elem mint hőszivattyú *fűtési jóságai tényezője* a fűtött oldalon időegység alatt felszabaduló hőmennyiség és a betáplált elektromos teljesítmény hányadosa:

$$\eta_f = \frac{P_f}{P_{el}} = \frac{\sigma I_p T_m + \frac{1}{2} \frac{\tau I_p \Delta T}{d} + \frac{1}{2} I_p^2 R - \frac{L A \Delta T}{d}}{\sigma I_p \Delta T + \frac{\tau I_p \Delta T}{d} + I_p^2 R}. \quad (10)$$

A *Peltier*-elem mint hűtőelem *hűtési jóságai tényezője* a hűtött oldalon időegység alatt a hűtött oldalról elvont hőmennyiség és a betáplált elektromos teljesítmény hányadosa:

$$\eta_b = \frac{P_b}{P_{el}} = \frac{\sigma I_p T_b - \frac{1}{2} \frac{\tau I_p \Delta T}{d} - \frac{1}{2} I_p^2 R - \frac{L A \Delta T}{d}}{\sigma I_p \Delta T + \frac{\tau I_p \Delta T}{d} + I_p^2 R}. \quad (11)$$

A kétféle jóságai tényező között a következő összefüggés áll fenn:

$$\eta_f - \eta_b = \frac{P_f}{P_{el}} - \frac{P_b}{P_{el}} = 1. \quad (12)$$

Az $\eta_f > \eta_b$ egyenlőtlenség fennállása annak következménye, hogy a *Thomson*- és *Joule*-féle hő a fűtés hatékonyságát segíti, miközben a hűtést akadályozza.

A *Peltier*-elemeket optikai képfelvévő, intenzitásmérő eszközök hűtésére használják a termikus zaj csökkentése érdekében, továbbá anyaghűtésre a fizikában, kémiában és biológiában egyaránt. Egy elemsorozattal akár 20 - 50 fokos hűtés is elérhető igen jó hatásfokkal.

Mérési eljárás, mérési feladatok:

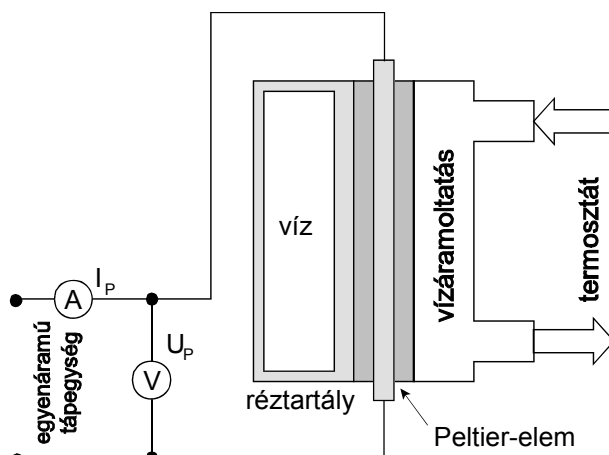
- 1) Vizsgálja meg a *Peltier*-elemet *termogenerátor-üzem*módban.

Ehhez töltsön körülbelül 150 ml meleg vizet (40 - 80 °C) a *Peltier*-elem oldalán elhelyezett nikkelezett réztartályba. Csatlakoztassa a kiadott kiefeszültségű motor vezetékét a *Peltier*-elemhez.

A következő – 2., 3., 4., 5. – feladatokban a *Peltier*-elemet *hőszivattyú-üzem*módban alkalmazzuk.

- 2) A *Peltier*-elem fűtési teljesítményének (P_f) és fűtési jósági tényezőjének (η_f) meghatározása konstans U_p feszültségnél, miközben a cella által hűtött oldalon állandó hőmérsékletet biztosítunk.

A *Peltier*-elem egyik oldalánál levő tartályt töltsen meg 100 ml vízzel és helyezze bele a digitális hőmérő érzékelőjét. A hőcserélőt (a másik oldalon elhelyezkedő edényt) csatlakoztassa gumicsöveken keresztül a keringető szivattyúhoz és indítsa meg a vízáramot. Ezzel eléri, hogy a keringető rendszerben levő nagy hőkapacitású víz áramlása ezt az oldalt állandó hőmérsékleten tartja. Állítsa össze a 3. ábrán látható áramkört. Állítsa be a *Peltier*-elem áramának irányát úgy, hogy a víz a tartályban melegedjen.



3. ábra

A cella feszültségét állítsa kb. 5 V értékre, és a mérés folyamán ezen konstans értéken tartsa. Mérje a tartályban lévő víz T_V hőmérsékletét és a *Peltier*-elemen keresztülfolyó I_p áramot az idő függvényében 15 percig (az első öt percben félpercenként, majd a továbbiakban egyperces időközönként).

Számítsa ki a melegedő rész $C (= \sum c_i m_i)$ hőkapacitását a vizet tartalmazó sárgaréz-edény méreteiből, valamint a víz térfogatából. A gyakorlat során használt *Peltier*-elem beépített, vörösréz-ből készült falának hőkapacitása 255 J/K. A szükséges adatokat táblázatban keresse meg.

Ábrázolja a víz T_V hőmérsékletét az idő (t) függvényében. A kapott görbe kezdeti része lineáris. Illesszen erre a tartományra egyenest, olvassa le ennek meredekségét. A *Peltier*-elem $Q = \sum c_i m_i \Delta T = C \Delta T$ hőmennyiséget ad át a hozzá csatolt réztartálynak és a benne levő víznek. Ez a hőmennyiség a *Peltier*-elem P_f fűtési teljesítményének és a fűtés Δt idejének szorzata, tehát P_f kiszámítható az alábbi összefüggés alapján:

$$P_f = C \frac{\Delta T_V}{\Delta t}. \quad (13)$$

Határozza meg a cella fűtésre vonatkozó jósági tényezőjét a (10) egyenlet alapján. P_{el} meghatározásához számítsa ki az egyenesre illeszkedő mérési pontokhoz tartozó U_p, I_p értékek szorzatainak átlagát.

Értelmezze a $T_p - t$ grafikon egyenestől való eltérését.

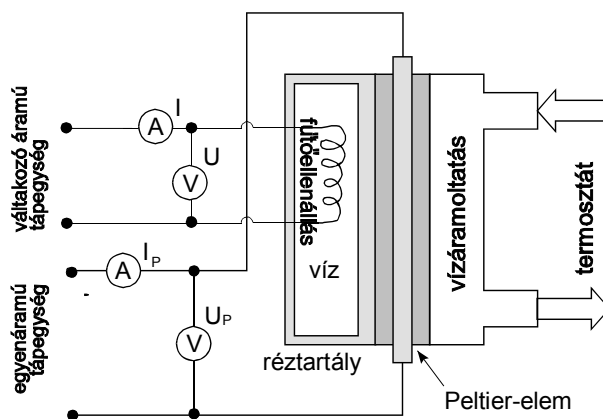
- 3) A *Peltier*-elem hűtési teljesítményének (P_b) és hűtési jósági tényezőjének (η_b) meghatározása konstans U_p feszültségnél, miközben a cella által fűtött oldalon állandó hőmérsékletet biztosítunk.

Fordítsa meg a hőszivattyú áramának irányát. A mérés megkezdése előtt cserélje ki a tartályban levő, felmelegített vizet szobahőmérsékletűre. Ebben az esetben is a fentiekben leírt módon határozza meg a P_b hűtési teljesítményt és az η_b jósági tényezőt. Hasonlítsa össze a hűtési és a fűtési jósági tényező értékét. Magyarázza meg az eltérést.

- 4) A *Peltier*-elem hűtési teljesítményének (P_h) és jósági tényezőjének (η_h) meghatározása konstans U_p feszültségnél vízáramoltatás nélkül.

Ismételje meg a 3. feladatot, de a vízűtést szüntesse meg a termosztát kikapcsolásával. A mérés megkezdése előtt cserélje ki a tartályban levő, lehűtött vizet szobahőmérsékletűre. Ábrázolja a víz hőmérsékletét az idő függvényében a 3. feladatnál készített grafikonon. Számítsa ki ismét a hűtési teljesítményt és a jósági tényezőt. Hasonlítsa össze a kapott értékeket a vízáramoltatásnál mértekkel. Mi lehet az eltérés oka? Gondoljon arra, hogy ahhoz, hogy a *Peltier*-elem hűteni tudja a vizet az egyik oldalon, a többlet-hőt le kell adnia a másik oldalon.

- 5) A *Peltier*-elem hűtési jósági tényezőjének meghatározása az I_p áram függvényében. Öntsön a réztartályba 150 ml vizet, helyezze bele a fűtőellenállást és a digitális hőmérő érzékelőjét. Kapcsolja be a keringető szivattyút. Egészítse ki az áramkört a fűtőkörrel a 4. ábrának megfelelően.



4. ábra

Változtassa az U feszültség értékét 0-10 V-os tartományon kb. 2 V-onként. Minden egyes esetben szabályozza úgy az U_p feszültséget, hogy a víz hőmérséklete ne változzon, azaz kompenzálja a *Peltier*-elem hűtő- és a fűtőellenállás melegítő hatását. Ekkor olvassa le az I_p , U_p , U , I értékeket. Ezzel a módszerrel meg tudjuk határozni a *Peltier*-elem hasznos hűtési teljesítményét (P_h -t), azt az értéket, amely

valóban a víz hőmérsékletének megváltoztatására fordítódik. Felírhatjuk tehát, hogy $P_b = P$.

Számítsa ki és ábrázolja a hűtés $\eta_b = P_b / P_{el}$ jósági tényezőjét I_p függvényében.

Ajánlott irodalom:

- 📖 Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., 123.§, 119.§, 124.§
- 📖 Hevesi Imre: Elektromosság, 12. 3. fejezet
- 📖 Budó Ágoston: Kísérleti fizika II., 180. §
- 📖 Aldert van der Ziel: Szilárdtestelektronika
- 📖 Simonyi Károly: Elektronfizika

Termoelektromos hőpumpa...



MELLÉKLETEK

A Nemzetközi Mértékegység-rendszer (SI)

A Nemzetközi Mértékegység-rendszer bevezetését és az erre épült törvényes mértékegységeket hazánkban a mérésügyről szóló 1991. évi XLV. törvény szabályozza. Az alábbiakban e törvény 1. számú mellékletét képező „Törvényes mértékegységek” című részt ismertetjük.

A Nemzetközi Mértékegység-rendszer alapegységei:

- 1) A *hosszúság* mértékegysége a méter; jele: *m*. A méter annak az útnak a hosszúsága, amelyet a fény vákuumban $1/299\,792\,458$ másodperc időtartam alatt megtesz.
- 2) A *tömeg* mértékegysége a kilogramm; jele: *kg*. A kilogramm az 1889. évben, Párizsban megtartott 1. Általános Súly- és Mértékügyi Értekezlet által a tömeg nemzetközi etalonjának elfogadott, a Nemzetközi Súly- és Mértékügyi Hivatalban, Sévresben őrzött platina-irídium henger tömege.
- 3) Az *idő* mértékegysége a másodperc; jele: *s*. A másodperc az alapállapotú cézium-133 atom két hiperfinom energiaszintje közötti átmenetnek megfelelő sugárzás $9\,192\,631\,770$ periódusának időtartama.
- 4) A *villamos áramerősség* mértékegysége az amper; jele: *A*. Az amper olyan állandó villamos áram erőssége, amely két egyenes, párhuzamos, végtelen hosszúságú, elhanyagolhatóan kicsiny kör keresztmetszetű és egymástól 1 méter távolságban, vákuumban elhelyezkedő vezetőben fenntartva, e két vezető között méterenként $2 \cdot 10^{-7}$ newton erőt hozna létre.
- 5) A *termodinamikai hőmérséklet* mértékegysége a kelvin; jele: *K*. A kelvin a víz hármaspontja termodinamikai hőmérsékletének $1/273,16$ szorososa.
- 6) Az *anyagmennyiség* mértékegysége a mól; jele: *mol*. A mól annak a rendszernek az anyagmennyisége, amely annyi elemi egységet tartalmaz, mint ahány atom van $0,012$ kilogramm szén-12-ben. A mól alkalmazásakor meg kell adni az elemi egy-

ség fajtáját; ez atom, molekula, ion, elektron, más részecske vagy részecskék meghatározott csoportja lehet.

- 7) A *fényerősség* mértékegysége a kandela; jele: *cd*. A kandela az olyan fényforrás fényerőssége adott irányban, amely $540 \cdot 10^{12}$ hertz frekvenciájú monokromatikus fényt bocsát ki és sugárerőssége ebben az irányban $1/683$ -ad watt per szteradián.

A Nemzetközi Mértékegység-rendszer kiegészítő egységei:

A *síkszög* mértékegysége a radián; jele: *rad*. A radián a kör sugarával egyenlő hosszúságú körívhez tartozó középponti síkszög.

A *térszög* mértékegysége a szteradián; jele: *sr*. A szteradián a gömbsugar négyzetével egyenlő területű gömbfelületrészhez tartozó középponti térszög.

A kiegészítő egységek dimenziótlan származtatott egységek, amelyek további származtatott egységek kifejezésére használhatók abból a célból, hogy az azonos dimenziójú, de különböző fajtájú mennyiségek mértékegységei egymástól megkülönböztethetők legyenek.

Az újabb nemzetközileg elfogadott álláspont szerint a síkszög és a térszög származtatott, dimenzió nélküli mennyiség.

A Nemzetközi Mértékegység-rendszer származtatott egységei:

A Nemzetközi Mértékegység-rendszer származtatott egységei az alapegységek és a kiegészítő egységek hatványainak szorzataként vagy hányadosaként képezhetők a megfelelő mennyiségekre vonatkozó fizikai egyenletek alapján.

A származtatott egységek az alapegységeken és a kiegészítő egységeken kívül az úgynevezett *külön nevű* egységek segítségével is kifejezhetők. A *külön nevű* származtatott egységek a következők:

- 1) A *frekvencia* mértékegysége a hertz (kiejtése: herc); jele: *Hz*
 $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$
- 2) A radioaktív sugárforrás *aktivitásának* mértékegysége a becquerel (kiejtése: bekerel); jele: *Bq*

- 1 Bq = 1 s⁻¹
- 3) Az *erő* mértékegysége a newton (kiejtése: nyúton); jele: *N*.
1 N = 1 m·kg·s⁻²
- 4) A *nyomás* mértékegysége a pascal (kiejtése: paszkál); jele: *Pa*.
1 Pa = 1 N·m⁻²
- 5) Az *energia* mértékegysége a joule (kiejtése: dzsúl); jele: *J*.
1 J = 1 N·m
- 6) A *teljesítmény* mértékegysége watt (kiejtése: vatt); jele: *W*.
1 W = 1 J·s⁻¹
- 7) Az *elnyelt sugárdózis* mértékegysége a gray (kiejtése: gréj); jele: *Gy*.
1 Gy = 1 J·kg⁻¹
- 8) A *dózisegyenérték* mértékegysége a sievert (kiejtése: szívert); jele: *Sv*.
A dózisegyenérték $H = D \cdot Q \cdot q$, ahol *D* az elnyelt sugárdózis, *Q* a sugárzás minőségi faktora, *q* pedig a besugárzott objektum minőségi tényezője. Egysége a sievert, amely a számértéktől eltekintve megegyezik a gray mértékegységével.
- 9) A *villamos töltés* mértékegysége a coulomb (kiejtése: kulomb); jele: *C*.
1 C = 1 A·s
- 10) A *villamos feszültség* mértékegysége a volt (kiejtése: volt); jele: *V*.
1 V = 1 W·A⁻¹
- 11) A *villamos kapacitás* mértékegysége a farad (kiejtése: farad); jele: *F*.
1 F = 1 C·V⁻¹
- 12) A *villamos ellenállás* mértékegysége az ohm (kiejtése: óm); jele: Ω .
1 Ω = 1 V·A⁻¹
- 13) A *villamos vezetőképesség* mértékegysége a siemens (kiejtése: szímensz); jele: *S*.
1 S = 1 Ω ⁻¹
- 14) A *mágneses fluxus* mértékegysége a weber (kiejtése: véber); jele: *Wb*.
1 Wb = 1 V·s
- 15) A *mágneses indukció* mértékegysége a tesla (kiejtése: teszla); jele: *T*.
1 T = 1 Wb·m⁻²

16) Az *induktivitás* mértékegysége a henry (kiejtése: henri); jele: *H*.

$$1 \text{ H} = 1 \text{ Wb} \cdot \text{A}^{-1}$$

17) A *fényáram* mértékegysége a lumen (kiejtése: lumen); jele: *lm*.

$$1 \text{ lm} = 1 \text{ cd} \cdot \text{sr}$$

18) A *megvilágítás* mértékegysége a lux (kiejtése: lux); jele: *lx*.

$$1 \text{ lx} = 1 \text{ lm} \cdot \text{m}^{-2}$$

A Nemzetközi Mértékegység-rendszeren kívüli, korlátozás nélkül használható törvényes mértékegységek:

1) *Térfogat* (űrtartalom)-mértékegység: liter; jele: *l*.

$$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 = 0,001 \text{ m}^3$$

A literrel kapcsolatban a hekto, deci és centi prefixumok is használhatók. A liter jeleként az *L* is használható.

2) *Síkszög*-mértékegységek:

$$\text{fok; jele: } ^\circ; 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad},$$

$$\text{perc (ívperc); jele: '}; 1' = \frac{1^\circ}{60} = \frac{\pi}{10800} \text{ rad},$$

$$\text{másodperc (ívmásodperc); jele: ''}; 1'' = \frac{1'}{60} = \frac{1^\circ}{3600} = \frac{\pi}{648000} \text{ rad}.$$

A fokkal, az ívperccel és az ívmásodperccel kapcsolatban SI-prefixumok nem használhatók.

3) *Tömeg*-mértékegység: tonna; jele: *t*.

$$1 \text{ t} = 1\,000 \text{ kg} = 10^3 \text{ kg} = 1 \text{ Mg}$$

4) *Idő*-mértékegységek:

perc; jele: *min*.

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

óra; jele: *h*.

$$1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3\,600 \text{ s}$$

nap; jele: *d*.

$$1 \text{ d} = 24\text{h} = 1\,440 \text{ min} = 86\,400 \text{ s}$$

naptári időegységek: a *hét*, a *bónap*, az *év*.

A fenti időmértékegységekkel kapcsolatban SI-prefixumok nem használhatók.

- 5) *Sebesség*-mértékegység: kilométer per óra; jele: *km/h*.

$$1 \text{ km/h} = 1/3,6 \text{ m/s}$$

- 6) *Munka(energia)*-mértékegység: wattóra; jele: *W·h*.

$$1 \text{ W}\cdot\text{h} = 3\,600 \text{ J}$$

- 7) *Hőmérséklet*-mértékegység: Celsius-fok; jele: $^{\circ}\text{C}$.

0 Celsius-fok hőmérséklet 273,15 kelvin hőmérséklettel egyenlő.

A Celsius-fok, mint hőmérsékletkülönbség, egyenlő a kelvinnel.

A Celsius-fokkal kapcsolatban SI-prefixumok nem használhatók.

A Nemzetközi Mértékegység-rendszeren kívüli, kizárólag meghatározott szakterületen használható törvényes mértékegységek:

- 1) *Hosszúság*-mértékegységek:

Csak a légi és tengeri hajózásban használható hosszúság-mértékegység a tengeri mérföld.

$$1 \text{ tengeri mérföld} = 1\,852 \text{ m}$$

Csak a csillagászatban használható hosszúság-mértékegység a *csillagászati (asztronómiai) egység*.

$$1 \text{ csillagászati egység} = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Csak a csillagászatban használható hosszúság-mértékegység a *fényév*.

$$1 \text{ fényév} = 9,460 \cdot 10^{15} \text{ m (közelítő érték)}$$

Csak a csillagászatban használható hosszúság-mértékegység a parsec; jele: *pc* (kiejtése: parszec).

$$1 \text{ pc} = 3,086 \cdot 10^{16} \text{ m (közelítő érték)}$$

A tengeri mérfölddel, a csillagászati egységgel, a parsec-kel és a fényévvel kapcsolatban SI-prefixumok nem használhatók.

2) *Terület*-mértékegység:

Csak földterület meghatározására használható terület-mértékegység a hektár; jele: *ha*

$$1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2 = 10^4 \text{ m}^2$$

A hektárral kapcsolatban SI-prefixumok nem használhatók.

3) *Síkszög*-mértékegység:

Csak a geodéziában használható síkszög-mértékegység az újfok vagy a gon; jele: gon.

$$1 \text{ gon} = 1 \text{ újfok} = \frac{\pi}{200} \text{ rad}$$

4) *Tömeg*-mértékegység:

Csak az atom- és magfizikában használható tömeg egység az atomi tömeg egység; jele: *u*.

Az atomi tömeg egység a szén-12-atom nyugalmi tömegének 1/12-szerese.

$$1 \text{ u} = 1,660\,57 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

5) *Nyomás*-mértékegységek:

Csak a folyadékok és gázok nyomásának meghatározására használható nyomás-mértékegység a bar; jele: *bar*.

$$1 \text{ bar} = 100\,000 \text{ Pa} = 10^5 \text{ Pa}$$

Orvosi vérnyomásmérő készüléknél használható a milliméter-higany; jele: *mmHg*.

$$1 \text{ mmHg} = 133,322 \text{ Pa}$$

6) *Energia*-mértékegység:

Csak az atom- és magfizikában használható energia-mértékegység az elektronvolt; jele: *eV*.

$$1 \text{ eV} = 1,602\,19 \cdot 10^{-19} \text{ J} \text{ (közelítő érték)}$$

7) *Teljesítmény*-mértékegységek:

Csak elektromos látszólagos teljesítmény meghatározására használható teljesítmény-mértékegység a volt-ampér; jele: *VA*.

$$1 \text{ VA} = 1 \text{ W}$$

A Nemzetközi Mértékegység-rendszer (SI)

Csak elektromos meddő teljesítmény meghatározására használható teljesítmény-mértékegység a var; jele: *var*.

$$1 \text{ var} = 1 \text{ W}$$

A mértékegység többszöröseit és törtrészeit az egység neve elé illesztett, egy-egy szorzót jelentő, alább felsorolt prefixumok (SI-prefixumok) segítségével lehet képezni:

Prefixum neve:	Prefixum jele:	A prefixummal jelképezett szorzó:
exa	E	10^{18}
peta	P	10^{15}
tera	T	10^{12}
giga	G	10^9
mega	M	10^6
kilo	k	10^3
hekto ¹	h	10^2
deka ¹	da	10^1
deci ¹	d	10^{-1}
centi ¹	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
mikro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
piko	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}

¹A hekto, deka, deci és centi prefixumokkal képezhető törvényes többszörösök és törtrészek: hektoliter (hl vagy hL), hektopascal (hPa), dekagramm (dag vagy dkg), deciliter (dl vagy dL), deciméter (dm), centiméter (cm), centigramm (cg), centiliter (cl vagy cL), centigray (cGy), centisievert (cSv).

A reverziós ingáról

A fizikai ingára vonatkozó néhány megjegyzés

Tekintsük az inga forgástengelyét az ingához képest rögzítettnek! Ebben az esetben azt mondhatjuk, hogy a G tömegközépponton áthaladó tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot $m\kappa^2$ alakban írhatjuk fel, ahol m a lengő test tömege, κ -t pedig a G körüli "forgási sugárnak" nevezhetjük. Valamely O ponton átmenő (a G tömegközépponton átmenő, az előbb említett tengellyel párhuzamos) tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték a $\Theta = m\kappa^2 + ml^2$ alakban helyettesíthető a fizikai inga T lengésidejének

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{mgl}} \quad (1)$$

képletébe. Itt g a nehézségi gyorsulást, l pedig a két tengely egymástól mért távolságát jelöli.

Végezzünk ezután kísérleteket g meghatározása céljából! Az első esetben legyen $l = l_1$. Akkor

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\kappa^2 + l_1^2}{gl_1}}. \quad (2)$$

Nem könnyű feladat κ és l_1 megmérése, de nem is szükséges. Ha az ingát egy másik, O' -n átmenő tengely körül is lengetjük, mikor $l = l_2$, akkor (2) helyett

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\kappa^2 + l_2^2}{gl_2}} \quad (3)$$

írható. Ha mármost az O és az O' körüli lengésidők megegyeznek egymással, akkor

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^2 + l_1^2}{l_1} &= \frac{\kappa^2 + l_2^2}{l_2}, \\ l_2\kappa^2 + l_2l_1^2 &= l_1\kappa^2 + l_1l_2^2, \\ \kappa^2(l_2 - l_1) &= l_1l_2(l_2 - l_1) \end{aligned} \quad (4)$$

innen azonnal az adódik, hogy

$$\kappa^2 = l_1 l_2. \quad (5)$$

Ha a κ -ra kapott eredményt akár a (2), akár a (3) egyenletbe behelyettesítjük, akkor azt kapjuk, hogy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_1 + l_2}{g}}. \quad (6)$$

Ebből az egyenletből látszik az, hogy a tömegközépponton átmenő egyenesen van két olyan pont, amelyek kielégítik azt a követelményt, hogy az ingának ugyanaz a lengésideje az egyik és a másik ponton átmenő tengely körül bekövetkező rezgőmozgás során.

Belátható azonban az is, hogy a tömegközépponton át felvett említett egyenesen *négy olyan pont van*, amelyekre nézve a lengésidő azonos, mivel a $T = 2\pi \sqrt{(\kappa^2 + l^2)/g}$ összefüggés l -re nézve kvadratikus. Négyzetre emelve kapjuk, hogy

$$\kappa^2 + l^2 = \frac{gT^2}{4\pi^2}. \quad (7.a)$$

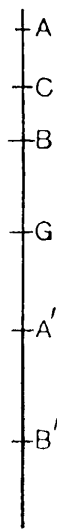
A jobb oldalon lévő mennyiség szükségszerűen pozitív ebben az egyenletben, ezért ezt úgy átrendezve, hogy valamennyi tag a bal oldalra kerüljön, egy $ax^2 + bx + c = 0$ típusú vegyes másodfokú egyenlethez jutunk, amelyben az első és a harmadik tag pozitív, az x -ben lineáris tag pedig negatív, így azután az egyenletnek két pozitív megoldása van:

$$l_{1,2} = \frac{gT^2}{8\pi^2} \pm \sqrt{\left(\frac{gT^2}{8\pi^2}\right)^2 - \kappa^2}. \quad (7.b)$$

Ez azt jelenti, hogy két olyan pont is létezik a tömegközéppont egyik oldalán is és a másik oldalán is, nevezetesen A, B, A', B' , amelyeknek az a tulajdonsága, hogy a körülöttük végzett lengések esetén ugyanaz a T lengésidő észlelhető.

Ügyelnünk kell azonban arra, hogy ezek a pontok miképpen helyezkednek el a G -n felvett függőleges egyenesünkön.

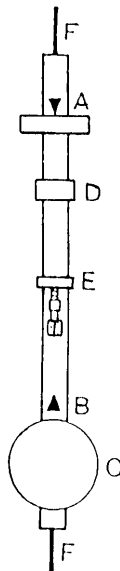
Tekintsük az 1. ábrán feltüntetett pontokat! A C pontot úgy kapjuk, hogy a (7.b) egyenletünkben elhagyjuk a négyzetgyökös tagot, és definíció szerint írjuk, hogy



1. ábra

$\overline{CG} = gT^2 / 8\pi^2$, $\overline{AC} = \overline{CB} = \sqrt{(gT^2 / 8\pi^2)^2 - k^2}$, ahol az \overline{AB} távolság pedig nem szolgáltatja a (6) egyenletünkben szereplő és g meghatározása szempontjából igen fontos $l_1 + l_2$ mennyiséget, hanem éppen az $l_1 - l_2$ különbséget, azaz a legutóbb felírt négyzetgyökös kifejezés értékének kétszeresét adja. Az A ponttól, amely l_1 távolságban van a G -től ($\overline{AG} = l_1$), éppen $l_1 + l_2$ távolságban fekszik B -nek G -re vonatkoztatott tükörképe, A' , és hasonló módon B -től $l_1 + l_2$ távolságban van, A -nak G -re vonatkoztatott B' tükörképe ($\overline{BG} = l_2$). A nehézségi gyorsulás meghatározására szolgáló készülék, a *reverziós inga* felépítésekor az itt elmondottakat vették figyelembe.

A reverziós ingára vonatkozó alapismeretek, Kater ingája



2. ábra

A reverziós inga egyik legrégebbi formája, amelyet a g nehézségi gyorsulás meghatározására alkalmaztak, *Kater* kapitánytól ered. A következőkben a jelölések egyszerűsítése érdekében az előző pontban alkalmazottakhoz képest újakat fogunk az ábrán használni, kiküszöbölve így a vesszős jelöléseket. A 2. ábrán tüntettük fel az ingát, vázlatosan. Az inga egy rúdból áll, amelyet két, A és B ékkel ($\overline{AB} = l_1 + l_2$), továbbá egy C nehezéssel látunk el. Az utóbbinak az a feladata, hogy az egész inga tömegközéppontját az A és B közötti szakasz felezőpontjától eltávolítsuk. A kisebb, beállíthatóan elmozdítható D és E nehezék, amelyek közül az egyiket esetleg mikrométercsavar segítségével finoman is állíthatunk, arra szolgál, hogy előbb a nagyobb D nehezéket, majd a kisebb E nehezéket elmozgatva, elérjük, hogy az inga lengésideje közül ugyanazt az értéket adja akár az A , akár pedig a B körüli lengetések során. Ere-

detileg ezt a beállítást addig finomították, amíg egy precíziós ingaórával való összehasonlításból azt nem kapták, hogy 24 óra alatt az óra ingájának és a reverziós ingának mozgása legfeljebb egy lengéssel tér el egymástól. Ezt az összehasonlítást az F mutatók és az óra ingájának együttes megfigyeléséből nyerték, távcső segítségével.

Mármost az alábbi fontos összefüggésekre kell rámutatnunk. (*Bessel* volt az, aki kimutatta, hogy fennállnak az itt következő relációk.) Tegyük fel, hogy az A és a B körüli lengetésekkor a T_1 és a T_2 lengésidők közel vannak egymáshoz, de mégsem teljesen egyenlők. Jelöljük most is l_1 -gyel, ill. l_2 -vel A -nak, ill. B -nek az inga tömegközéppontjától való távolságát. Fennállnak a

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1^2 + k^2}{l_1 g}} \quad \text{és} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2^2 + k^2}{l_2 g}} \quad (8)$$

egyenletek, vagyis

$$\frac{g}{4\pi^2} l_1 T_1^2 = l_1^2 + k^2 \quad \text{és} \quad \frac{g}{4\pi^2} l_2 T_2^2 = l_2^2 + k^2, \quad (9)$$

amely utóbbiakat egymásból kivonva, kapjuk, hogy

$$\frac{g}{4\pi^2} (l_1 T_1^2 - l_2 T_2^2) = l_1^2 - l_2^2, \quad (10)$$

azaz

$$\begin{aligned} \frac{4\pi^2}{g} &= \frac{l_1 T_1^2 - l_2 T_2^2}{l_1^2 - l_2^2} = \frac{l_1 T_1^2 + l_1 T_2^2 - l_2 T_1^2 - l_2 T_2^2 + l_1 T_1^2 - l_1 T_2^2 + l_2 T_1^2 - l_2 T_2^2}{2(l_1^2 - l_2^2)} \\ &= \frac{(T_1^2 + T_2^2)(l_1 - l_2) + (T_1^2 - T_2^2)(l_1 + l_2)}{2(l_1^2 - l_2^2)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Innen azonnal kapjuk végeredmény gyanánt, hogy

$$\frac{4\pi^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{T_1^2 + T_2^2}{l_1 + l_2} + \frac{1}{2} \frac{T_1^2 - T_2^2}{l_1 - l_2}. \quad (12)$$

Az ékek egymástól való távolsága éppen $l_1 + l_2$ -vel egyenlő, $(T_1^2 + T_2^2)/2$ pedig nem más, mint az egyik ék és a másik ék körüli lengetések során kapott lengési idők négyzetének középértéke. A g nehézségi gyorsulás meghatározásakor a (12) egyenlet jobb oldalán lévő második tag szerepe igen csekélyé tehető, mert a számlálóban lévő különbségnek a tolosúlyok elmozdítása révén igen kicsinnyé tehető az értéke, és

ugyanakkor a nevezőben szereplő különbség az inga tömegeloszlásának helyes kialakítása esetén hozzávetőlegesen az éktávolság egyharmad részét teszi ki, ld. pl. *Kobtrausch* *Praktische Physik* című monográfiájának I. kötetét, amelyben olvasható, hogy a szokásos reverziós ingáknál általában $l_1 : l_2 = 1 : 2$ érvényes. (Egyébként több szerző is javasolja a tömegközéppont helyzetének hozzávetőleges pontosságú meghatározására az inga vízszintes helyzetben egy külön erre a célra használt ék segítségével való alátámasztását és kiegyensúlyozását; ilyen esetben az alátámasztás helye a tömegközéppont helyével egyezik meg. Ennek az eljárásnak eléggé nagy lehet a hibája; a tolósúlyok megfelelő, egy oldalra való elmozgatásával viszont elérhető, hogy (12)-ben a $T_1^2 - T_2^2$ eléggé nagy értékű legyen ahhoz, hogy az ékek közötti $l_1 + l_2$ távolság pontos ismeretében a két ék körüli lengésidők mérése után a (12) egyenletből kifejezzük és kiszámítsuk pl. a tolósúlyok adott elrendezéséhez tartozó l_1 -et.)

A nehézségi gyorsulás mérésekor rögzített ékekkel bíró reverziós inga alkalmazásakor a következőkre kell ügyelnünk. A tolósúly, ill. a tolósúlyok elmozgatásakor nemcsak a tömegközéppont helyzetét, s ezzel együtt a lengésidőket változtatjuk meg, hanem még a tömegközépponton áthaladó tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékokat, azaz m konstans volta miatt a k mennyiséget is. A (8) egyenletpár, valamint az ebből nyert (12) végeredmény tehát csak egy meghatározott tömegeloszlásra vonatkozóan igaz. A tolósúly fokozatos elmozdításakor kapott T_1, T_2 értékpárok mérésekor azt találjuk, hogy az egyik lengésidő a tolósúly helyzetét mutató skálabeosztás függvényeként növekszik, a másik pedig csökken; az így kapott függvényeket első közelítésben lineárisnak tekinthetjük, és a kapott egyenesszakaszok metszéspontja adja a (6) egyenletbe helyettesíthető lengésidőt.

A *Budó*-féle tankönyvben és a *Budó-Szalay*-féle jegyzetben az l_1, l_2 helyett az s_1, s_2 jelöléseket találhatjuk.

A nehézségi gyorsulás pontos meghatározására vonatkozóan kapott fontosabb eredményekről és a korrekciós eljárásokról

A fentebbiekben leírtak legnagyobb része *S.G. Startling* és *A.J. Woodall* *Physics* c. monográfiájából származik, egyes bekezdések az ottani szövegekkel szóról szóra megegyeznek. Az ingával kapcsolatos első publikáció *J. Bobnenberg* műve, (Tübingen, 1811) az inga *H. Kater* angol kapitány vizsgálatai során került 1818-ban alkalmazásra, a készüléket az utóbbi tudósról nevezték el. *F.W. Bessel* állított elő olyan készüléket 1826-ban, amely külsőlegesen szimmetrikus felépítettsége miatt (ld. később!) ma is precíziós eszköznek tekinthető. A legfontosabb elméleti megfontolásokat már a múlt század végén összegyűjtötte *F.W. Bessel*, a reverziós ingára vonatkozóan az irodalom leginkább őt idézi. Az irodalomjegyzékben ezért szerepeltetjük a dolgozatát eredetiben, a kézikönyvek mellett.

A fontosabb rendszeres hibák a reverziós inga alkalmazásakor

Véges amplitúdó esetén fellépő hiba:

Az ingára vonatkozó mozgásegyenletek csak abban az elképzelt esetben egyszerűek, amelyben az inga „végtelenül kicsiny” amplitúdóval leng. Véges amplitúdó esetében a precíziós eljárások során képletekben foglalt korrekciós számításokat alkalmaznak; ezekre vonatkozóan *Budó* és *Kobbrausch* műveire utalunk. A *Kobbrausch*-féle monográfiából itt csak azt emeljük ki, hogy amennyiben az inga lengésekor a két szélső helyzet közötti szögelfordulás, más szóval a teljes szögamplitúdó nem nagyobb, mint 10° , akkor a mért és a megfontolásokban szerepeltetett T lengésidők közötti eltérés 0,05%-nál kisebb.

Az ék nem tökéletesen éles volta miatti hiba:

Az inga ékét közelítőleg hengerfelületűnek tekinthetjük. Ha a reverziós inga két éke közelítőleg ugyanazon görbületi sugárral bíró hengerfelületűnek vehető, akkor a képleteinken gyakorlatilag nem kell változtatnunk, részletesebb felvilágosítást *Starling*

és *Woodall* monográfiájában kapunk. A laboratóriumi gyakorlatok végzésekor erre a körülményre nem kell külön ügyelnie a hallgatónak.

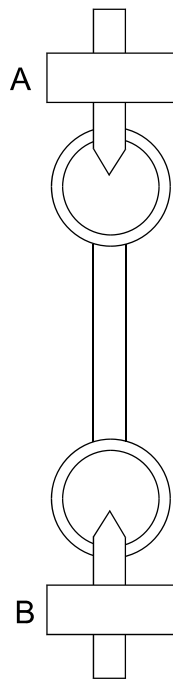
A levegővel való kölcsönhatásokból származó hibák:

A reverziós inga a lengései során csillapodó rezgőmozgást végez, a levegővel való súrlódás következtében. Ebből még nem származnék nagyobb gond, de a levegő jelenléte miatt két újabb hatás is fel fog lépni. Ezek közül az első helyen kell megemlítenünk a *levegő felhajtó erejéből* származó effektust.

Jelöljük rendre ϑ -val, m' -vel és l' -vel az inga kitérésének szögét, az inga által kiszorított levegő tömegét és a kiszorított levegő tömegközéppontjának a felfüggesztés A pontjától mért távolságát, akkor kicsiny kitéréseknél jó közelítésben azt írhatjuk,

hogyan

$$m(k^2 + l_1^2) \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -g(ml_1 - m' l') \vartheta. \quad (13)$$



3. ábra

Hasonló összefüggés írható fel a másik ék körüli lengetésekre vonatkozóan is. A levegő felhajtó erejéből származó szisztematikus hiba mellett fellép még egy másik is, amely a *környező levegő együttmozgásából* származik. Ennek az együttmozgásnak a hatását szemléletesen a következő módon írhatjuk le. Belátható, hogy ha az inga valamely irányban gyorsuló mozgást végez, akkor a vele érintkező levegőt is felgyorsítja, és amikor ez a gyorsulás negatív, akkor a mozgó levegő a sebességet fenntartani igyekszik. Ezért azután a levegőnek olyan a hatása, mintha megnövekedett volna az inga tehetetlensége. Az ilyen hatást nemigen tudjuk egzaktul még annyira sem kezelni, mint az ékek nem tökéletesen éles alakjából származó hibát. Szerencsére a számítások azt mutatják, hogy sem a levegő felhajtó erejéből, sem pedig a levegő együttmozgásából származó hibát nem kell a precíziós mérések során külön figyelembe vennünk, ha gondoskodunk arról, hogy a reverziós

inga geometriai értelemben véve tükörszimmetrikus felépítésű legyen egy pontra vonatkozóan, úgy, ahogyan azt a vázlatosan megszerkesztett 3. ábra mutatja.

Az ábrán feltüntetett A és B korongok közül az egyik üres, a másik pedig fémmel töltött; így elérhető, hogy amint erre *Starling* és *Woodall* monográfiája a korábbi irodalom alapján részletesebben kitér, ne kelljen fáradságos korrekciókat bevezetnünk a levegővel való kölcsönhatásra vonatkozóan, de teljesüljön az a követelmény is, hogy a reverziós inga tömegközéppontja ne essék a két éket összekötő távolság közepére.

A nehézségi gyorsulás meghatározására vonatkozó újabb módszerek közé tartozik a légüres térben szabadon ejtett testek mozgásának vizsgálatán alapuló eljárás, ám a laboratóriumi gyakorlatok szempontjából a legpontosabban kivitelezhetőnek mégis a reverziós ingán alapulót nevezhetjük meg. Az utolsó pontban elmondottak főleg azt a célt szolgáztatják, hogy a mérést végző hallgató figyelmét a lehetséges rendszeres hibák legfontosabbjaira felhívjuk, és így utaljunk arra, hogy egy-egy gyakorlat során nem várhatjuk el g értékének sok számjegynyi pontossággal való meghatározását.

Irodalom:

- 📖 Budó Á. és Szalay L.: Fizikai laboratóriumi gyakorlatok, kézirat, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.
- 📖 Budó Á.: Kísérleti fizika I., Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.
- 📖 E. Grimsehl: Lehrbuch der Physik, Bd.I., B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1981.
- 📖 A. Recknagel: Physik (Mechanik), Verlag Technik, Berlin, 1980
- 📖 D.V. Szivuhin: Obscsij kursz fiziki, Tom. I. Mehanyika, Izdatyelsztvo „Nauka”, Moszkva, 1974.
- 📖 F. Kohlrausch: Praktische Physik, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1951
- 📖 O.D. Chwolson: Mechanik und Messmethoden, Druck und Verlag von Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1918.
- 📖 K. Scheel: Handbuch der Physik, Bd. II-ben: A. Berroth: Schwehremessungen, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1926.

- 📖 S.G. Starling and A.J. Woodall: *Physics*, Longmans, Green and Co, London, New York, Toronto, 1952.
- 📖 F.W. Bessel: *Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels*, *Abhandlungen der Berliner Akademie d. W.*, 1826; *Versuche über die Kraft, mit welcher die Erde Körper mit verschiedener Beschaffenheit anzieht*, *Abhandlungen der Berliner Akademie d. W.*, 1830.

A higany-kadmium spektrállámpa spektrumvonalai

szín	λ (nm)	relatív inten- zítás	szín	λ (nm)	relatív intenzi- tás
ibolya	390,2	20 (Hg)	zöld	515,5	6 (Cd)
ibolya	390,6	60 (Hg)	zöld	529,1	20 (Hg)
ibolya	398,2	10 (Cd)	zöld	531,7	5 (Hg)
ibolya	398,3	200 (Hg)	zöld	535,4	60 (Hg)
ibolya	404,7	1800 (Hg)	zöld	538,5	30 (Hg)
ibolya	407,8	150 (Hg)	sárgás-zöld	546,1	1100 (Hg)
ibolya	410,8	40 (Hg)	sárgás-zöld	555,0	30 (Hg)
ibolya	430,7	8 (Cd)	sárga	577,0	240 (Hg)
ibolya	433,9	250 (Hg)	sárga	579,0	100 (Hg)
ibolya	434,8	400 (Hg)	sárga	579,1	280 (Hg)
ibolya	435,8	4000 (Hg)	sárga	586,0	60 (Hg)
kékes-ibolya	441,3	3 (Cd)	sárga	587,2	20 (Hg)
kék	466,2	8 (Cd)	sárga	607,3	20 (Hg)
kék	467,8	200 (Cd)	sárga	609,9	300 (Cd)
kék	480,0	300 (Cd)	sárga	611,2	100 (Cd)
kékes-zöld	488,3	5 (Hg)	narancs	623,4	30 (Hg)
kékes-zöld	489,0	5 (Hg)	narancs	632,5	100 (Cd)
kékes-zöld	491,6	80 (Hg)	narancs	633,0	30 (Cd)
zöld	497,0	5 (Hg)	vörös	643,9	2000 (Cd)
zöld	498,1	5 (Hg)	vörös	671,6	160 (Hg)
zöld	508,6	1000 (Cd)	vörös	677,8	30 (Cd)
zöld	510,3	20 (Hg)	vörös	690,8	250 (Hg)
zöld	512,1	40 (Hg)	vörös	708,2	250 (Hg)
zöld	513,8	20 (Hg)	vörös	709,2	200 (Hg)

A hélium spektrállámpa fontosabb látható vonalai

szín	λ (nm)	relatív inten- zitás
ibolya	438,8	10
kék	447,1	200
kék	471,3	30
kékes-zöld	492,2	20
zöld	501,6	100
sárga	587,6	500
vörös	667,8	100
vörös	706,5	200